

Allgemeine Hinweise zu den Projektaufgaben

- Außer Schreibzeug, Lineal und Schere sind zur Bearbeitung keine Hilfsmittel zugelassen.
- Für die Bearbeitung werden karierte Doppelbögen zur Verfügung gestellt. Gewertet werden nur Bearbeitungen auf diesen Doppelbögen.
- Gestalten Sie Ihre Ausarbeitungen zu den Aufgaben so, dass jeweils der von Ihnen gewählte Lösungsansatz und die Schritte des Lösungsweges nachvollziehbar sind.

Projektaufgabe I

Die Endrunde zur Fußball-Europameisterschaft in Frankreich fand in diesem Jahr erstmals mit 24 Mannschaften statt. Anlässlich zahlreicher Kritiken an langweiligen und von Taktik geprägten Vorrundenspielen prüft die UEFA nun alternative Durchführungswege einer Europameisterschaftsendrunde.

Zur Diskussion steht dabei auch ein Modell, bei dem die besten n Nationalmannschaften einer vorgeschalteten Qualifikationsrunde den Europameister in einer Nationenliga mit Hin- und Rückspiel ermitteln.

Ihre Aufgabe besteht nun darin, einen Spielplan für eine solche Nationenliga zu entwickeln unter Berücksichtigung der folgenden Anforderungen und Regeln:

Anforderung 1 *Die Endrunde teilt sich in eine Hin- und eine Rückrunde. In beiden spielt jedes Land gegen jedes andere genau einmal. Von der Hin- zur Rückrunde wechselt das Heimrecht.*

Anforderung 2 *In der Hin- und Rückrunde treten die Spielpaarungen in der gleichen Reihenfolge (nur mit vertauschtem Heimrecht) auf.*

Anforderung 3 *Der Wechsel aus Heim- und Auswärtsspielen einer festen Mannschaft lässt sich durch eine Zahlenfolge beschreiben, z.B. HAAHAAHHAH für Heimspiel, Auswärtsspiel, Auswärtsspiel, Heimspiel, Auswärtsspiel und dann Rückrunde. Der HA-Rhythmus soll möglichst wenig gewechselt werden, d.h. es sollen möglichst selten zwei Heim- und Auswärtsspiele direkt aufeinander folgen.*

(I.1) Wie viele Spiele ergeben sich bei n Mannschaften unter der Bedingung, dass jede Mannschaft gegen jede andere ein Heim- und ein Auswärtsspiel bestreitet? Und wie viele Spieltage mit je wie vielen Spielen sind dann zu organisieren?

(I.2) Begründen Sie, warum für $n > 2$ die Anforderung

Anforderung 4 *Für keine Mannschaft wird der HA-Rhythmus gewechselt, d.h. jede Mannschaft bestreitet Heim- und Auswärtsspiele immer abwechselnd.*

nicht simultan mit Anforderungen 1 und 2 durchgeführt werden kann.

(I.3) Begründen Sie, warum für gerade Zahlen $n > 2$ die Anforderung

Anforderung 5 Die Zahl der bereits absolvierten Heimspiele einer jeden Mannschaft darf zu keinem Zeitpunkt von der Zahl ihrer absolvierten Auswärtsspiele um mehr als 1 abweichen.

nicht simultan mit Anforderungen 1 und 2 durchgeführt werden kann.

Hinweis: Überlegen Sie, was die Anforderung 5 nach jeder geraden Anzahl von Spieltagen bedeutet. Betrachten Sie den geraden Spieltag $2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Was gilt dann für die beiden Spieltage $2 \cdot k - 1$ und $2 \cdot k$ in Bezug auf Auswärts- und Heimspiel?

(I.4) Entwerfen Sie zwei Spielpläne jeweils für sieben und acht Mannschaften. Verwenden Sie dazu einfach die Ziffern von 1 bis 7 bzw. 8. Es ist ausreichend, die Hinrunde zu beschreiben.

Geben Sie dafür Ihr Ergebnis in einer Matrixform wie unten im Beispiel für $n = 5$ an. Der ij -te Eintrag gibt an, wann die Mannschaft i gegen j spielt. Der Eintrag in der Spalte J bzw. Zeile J gibt an, wann eine Mannschaft spielfrei hat. In der Spalte HA-Folge ist die HA-Folge der Hinrunde angegeben.

Versuchen Sie die Anforderung 5 möglichst optimal umzusetzen.

Beispiel für $n = 5$:

	1	2	3	4	5	HA-Folge
1	x	3	4	5	1	AxHAHHXAHA
2	3	x	5	1	2	AHAxHHAHxA
3	4	5	x	2	3	xHAHAxAHAH
4	5	1	2	x	4	HAxHAAHxAH
5	1	2	3	4	x	HAHAxAHAHx

x bedeutet "spielfrei". Dies tritt nur bei ungeradem n auf.

Projektaufgabe II

Die portugiesische Bevölkerung ist derart begeistert über den erstmaligen und etwas überraschenden Titelgewinn ihrer Nationalmannschaft, dass bei der UEFA in den letzten Tagen zahlreiche Anfragen portugiesischer Bürger eingegangen sind, die ein Stück des Endspielrasens im Stade de France käuflich erwerben wollen.

Nach Rücksprache mit dem französischen Verband hat sich die UEFA nun entschieden, dem nachzukommen und will die rechteckige Spielfeldfläche in Einzelstücken zum Kauf anbieten.

Beim Zuschnitt der Rasenstücke ist darauf zu achten, dass die Rasenstücke zum einen lückenlos aneinander passen. Zum anderen sollen die Rasenstücke völlig identisch aussehen, d.h. wenn man sie mit dem Rasen nach oben hinlegt, soll man sie deckungsgleich übereinander stapeln können. Außerdem sollen nur Ecken an Ecken stoßen. Je nach geometrischer Form wird der Zuschnitt am Rand des Spielfelds nicht genau aufgehen. Dies dürfen Sie in dieser Aufgabe außer Acht lassen.

(II.1) Ist es möglich, das Spielfeld in Rasenstücke aufzuteilen, die regelmäßige Dreiecke sind? Was ist mit nicht regelmäßigen Dreiecken? Begründen Sie Ihre Antwort.

(II.2) Dass die Rasenfläche des Spielfelds in quadratische bzw. rechteckige Rasenstücke aufgeteilt werden kann ist klar. Was ist mit anderen Vierecken? Was ist insbesondere mit solchen Vierecken, bei denen ein Innenwinkel größer als 180 Grad ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(II.3) Dass die Rasenfläche in regelmäßige Sechsecke aufgeteilt werden kann ist auch klar. Das gibt ein Bienenwabenmuster. Geht es auch mit regelmäßigen Fünfecken? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, sich in einem ersten Schritt zu überlegen, wie groß die Summe der Innenwinkel in einem gleichmäßigen Fünfeck ist.