Hochschule
für Technik
Stuttgart

HFT Stuttgart
Fakultät für Vermessung, Informatik und Mathematik
Studiengang Mathematik
Unterrichtsmaterialien zum Schulfach IMP

Aussagenlogik - Satz und Kehrsatz

Motivation

Der in der Mathematik grundlegende Begriff des Satzes und seines Kehrsatzes wird eingeführt und anhand von Beispielen sowohl aus der Mathematik als auch aus dem Alltag erklärt.

Einführung

Definition 1

Ein **„Wenn A, dann B"-Satz** (kurz: ein **Satz**) ist eine Aussage der Form: „Immer, wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr." Man nennt A eine **Voraussetzung** und B eine **Behauptung** und schreibt dafür kurz:
Voraussetzung $\Rightarrow$ Behauptung.

Wir können einen Satz folgendermaßen formulieren: „Wenn die Voraussetzung gilt, dann gilt die Behauptung."

Beispiel 1

a) „Wenn heute Silvester ist, dann ist das Datum der 31.12."

b) „Wenn Harvey ein Hase ist, dann ist Harvey ein Säugetier."

c) „Wenn die S-Bahn heute streikt, kann ich nicht mit der S-Bahn fahren."

Diese Sätze sind wahr. Allgemein muss ein Satz nicht zwingend zutreffen: Eine Aussage der Form „Wenn die S-Bahn heute streikt, dann kann ich heute nicht in die Schule kommen." würde man eventuell im alltagssprachlichen Gebrauch akzeptieren. Im mathematischen Sinne ist sie falsch. Hier ist man rigoros: Wenn die S-Bahn streikt, kann man auch mit dem Fahrrad zur Schule kommen oder sich möglicherweise von den Eltern im Auto mitnehmen lassen.

Die Mathematik fordert einen Beweis für den Wahrheitswert eines Satzes und formuliert dies so:

Definition 2

Ein Satz ist wahr, wenn die Behauptung für alle Fälle zutrifft, in denen die Voraussetzung wahr ist. Man sagt dann auch: Ein Satz gilt. Ein Satz ist falsch, wenn es ein Gegenbeispiel gibt.

Beachte: Um herauszufinden, ob ein Satz wahr ist, betrachtet man also ausschließlich die Fälle, für die die Voraussetzung wahr ist. Diese zu prüfenden Fälle werden dem Mathematiker „wie auf einem Silbertablett" hingereicht. Deshalb bezeichnet man die Voraussetzung auch als *hinreichende* Bedingung.
Ist in jedem dieser Fälle, nicht nur in manchen(!), die Behauptung wahr, dann ist der Satz wahr. Die Behauptung muss also notwendigerweise wahr sein. Deshalb nennt man die Behauptung auch *notwendige* Bedingung.

Unterschiedliche Fälle für die Voraussetzung

Man kann sich für die Voraussetzung drei verschiedene Szenarien vorstellen:

Erstes Szenario: Die Voraussetzung gilt manchmal

Beispiel 2

a) „Wenn es regnet, ist die Straße nass."

b) „Wenn eine Zahl durch 10 teilbar ist, dann ist sie gerade."

c) „Wenn eine Zahl durch drei teilbar ist, dann ist sie gerade."

Der erste Satz ist trivialerweise wahr. Im zweiten Beispiel betrachten wir nur solche Zahlen, die durch 10 teilbar sind, also beispielsweise 10, 30 oder 150. Diese werden uns „auf dem Silbertablett" hingereicht. Wir stellen unter Berücksichtigung der Teilbarkeitsregeln fest, dass alle diese Zahlen gerade sind. Der Satz ist also wahr. Andere Zahlen, wie zum Beispiel die Zahl 75, werden uns nicht hingereicht, wir lassen sie außer Acht. Im dritten Beispiel liegen auf dem Tablett unter anderen die Zahlen 18 und 15, da beide durch 3 teilbar sind. Für die Zahl 18 trifft die Behauptung zwar zu, aber wir finden auch ein Gegenbeispiel: Für die Zahl 15 ist die Behauptung falsch, denn 15 ist keine gerade Zahl. Deshalb ist der Satz falsch.

Zweites Szenario: Die Voraussetzung ist allgemeingültig

Beispiel 3

a) „Wenn ein Hase ein Säugetier ist, dann gilt: $1 \cdot 1 = 1$."

b) „Wenn ein Hase ein Säugetier ist, dann legt er Eier."

c) „Wenn jede gerade Zahl durch zwei teilbar ist, dann ist auch jede gerade Zahl durch drei teilbar."

Die Voraussetzung der ersten beiden Beispiele „Ein Hase ist ein Säugetier" ist eine grundsätzlich wahre, also allgemeingültige Aussage. Deshalb müssen wir im ersten Beispiel prüfen, ob die Behauptung „$1 \cdot 1 = 1$" ebenfalls unter allen Umständen gilt: Und tatsächlich ist die Behauptung nach den üblichen Rechenregeln in allen Fällen wahr. Der komplette Satz ist deshalb wahr, obwohl Voraussetzung und Behauptung in keinem Zusammenhang stehen und wir ihn deshalb als unsinnig betrachten. Die Behauptung im zweiten Beispiel hingegen ist falsch. Somit ist der Satz natürlich falsch.
Auch im dritten Beispiel gilt die Voraussetzung in allen Fällen: Jede gerade Zahl ist durch zwei teilbar. Es ist zu prüfen, ob die Behauptung ebenfalls allgemeingültig ist: Beispielsweise ist die gerade Zahl 6 ist durch drei teilbar, aber die Zahl 8 nicht. Also ist auch der dritte Satz falsch.

Drittes Szenario: Die Voraussetzung ist unerfüllbar

Was passiert, wenn eine Voraussetzung unter keinen Umständen wahr sein kann? Wenn wir von grundsätzlich falschen Voraussetzungen ausgehen, können wir doch eigentlich keine Schlussfolgerungen daraus ziehen. Die Mathematik hat dafür eine einfache Lösung: Gibt es keinen Fall, in dem die Voraussetzung zutrifft, dann sind alle Behauptungen wahr.

Beispiel 4

a) „Wenn ein Hase kein Säugetier ist, dann gilt: $1 \cdot 1 = 2$.“

b) „Wenn ein Hase kein Säugetier ist, dann gilt: $1 \cdot 1 = 1$.“

c) „Wenn Weihnachten auf den ersten April fällt, dann ist an diesem Tag schulfrei.“

Alle drei Sätze sind wahr.
Anmerkung: Falls du einen lebenden Hasen finden solltest, der kein Säugetier ist, dann melde dich bei mir.

Die „Wenn ..., dann“-Form

Viele Sätze in der Mathematik lassen sich in die „Wenn ..., dann“-Form bringen. In dieser Form lassen sich Voraussetzung und Behauptung gut erkennen.

Beispiel

Ein bekanntes Beispiel ist der Satz des Pythagoras: „In jedem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.“
In der „Wenn ..., dann“-Form lautet er: „Wenn ein rechtwinkliges Dreieck gegeben ist, dann ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse dieses Dreiecks gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.“

Der Kehrsatz

Definition 3

Kehrt man in einem Satz Voraussetzung und Behauptung um, so spricht man vom Kehrsatz. Zu einem Satz „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.“ lautet also der Kehrsatz: „Wenn B wahr ist, dann ist auch A wahr.“

Zu einem wahren Satz muss der Kehrsatz nicht unbedingt wahr sein. Dieser muss separat bewiesen werden.

Beispiele

a) Zu dem offensichtlich wahren Satz „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ kann man den Kehrsatz bilden: „Wenn die Straße nass ist, regnet es.“ Der Kehrsatz ist falsch. Die nasse Straße könnte beispielsweise auch auf einen Wasserrohrbruch zurückzuführen sein.

b) Zu dem wahren Satz „Wenn das Datum der 31.Dezember ist, dann ist Silvester.“ lautet der Kehrsatz „Wenn Silvester ist, dann ist das Datum der 31.Dezember.“ Diese Aussage ist wahr.

c) Zu dem wahren Satz „Wenn Harvey ein Hase. ist, dann ist er ein Säugetier.“ kann man den Kehrsatz bilden: „Wenn Harvey ein Säugetier ist, dann ist er ein Hase.“ Dieser ist falsch: Ist Harvey beispielsweise ein Hund, dann stimmt zwar die Voraussetzung, aber nicht die Behauptung.

Äquivalenz: „Genau dann, wenn... “

Definition 4

Wenn sowohl der Satz „Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr“ als auch sein Kehrsatz„Wenn B wahr ist, dann ist auch A wahr“ gilt, so schreibt man auch „A ist genau dann wahr, wenn B wahr ist.“
Man sagt auch:
Wenn zwei Aussagen A und B immer den gleichen Wahrheitswert annehmen, dann sind A und B äquivalent: $A \iff B$.

Beispiel

Es gilt der Satz: „Genau dann, wenn das Datum der 31.12. ist, ist Silvester.“ Die Aussage „Das Datum ist der 31.12.“ ist äquivalent zu der Aussage „Es ist Silvester.“ Im Alltag erscheinen äquivalente Aussagen oft trivial.

Literatur

[1] Walz, G., *Lexikon der Mathematik: Band 4, Moo bis Sch*, 2. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg 2002, DOI 10.1007/978-3-662-53500-4
[2] https://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/Grundlagen-WS1011.pdf [14.02.2022]
[3] Glosauer, T., *(Hoch)Schulmathematik*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-658-24574-0

Übungsblatt zum Thema „Satz versus Kehrsatz "

Aufgabe 1: Die Voraussetzung stimmt manchmal

Sind folgende Sätze wahr?

a) „Wenn die Ampel „rot" anzeigt, dann solltest du stehen bleiben."

b) „Wenn Lotte das Kind von Simon ist, dann ist Simon der Vater von Lotte."

c) „Wenn eine Zahl ungerade ist, dann ist sie durch fünf teilbar."

d) „Wenn eine gerade Zahl durch fünf teilbar ist, dann ist sie auch durch 10 teilbar."

Aufgabe 2: Die Voraussetzung ist allgemeingültig

Sind folgende Sätze wahr?

a) „Wenn Neujahr auf den 1.Januar fällt, dann ist dieser Tag ein Sonntag."

b) „Wenn ein Quadrat ein Viereck ist, dann hat das Quadrat fünf Seiten."

c) „Wenn eine gerade Zahl durch zwei teilbar ist, dann ist die Erde keine Scheibe."

Aufgabe 3: Die Voraussetzung ist unerfüllbar

Sind folgende Sätze wahr?

a) „Wenn die Ampel „blau" anzeigt, dann solltest du stehen bleiben.

b) „Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann kann man hinunterfallen."

c) „Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist vier eine ungerade Zahl."

Aufgabe 4

Bilde zu den Sätzen aus Aufgabe 1 c) und 2 b) den jeweiligen Kehrsatz und bestimme den Wahrheitswert.

Aufgabe 5
Bühne frei: Denke dir selbst je einen wahren und einen falschen Satz der Form „Wenn..., dann..“ aus für die folgenden Fälle:

a) Die Voraussetzung stimmt manchmal:

b) Die Voraussetzung ist allgemeingültig:

c) Die Voraussetzung ist unerfüllbar:

Aufgabe 6
Und zum Schluss kommt die Profi-Aufgabe:

a) Ist der folgende Satz wahr?
„Und wenn sie nicht gestorben sind, dann leben sie noch heute.“

b) Bilde den Kehrsatz. Ist er wahr?

Lösungen zum Thema „Satz versus Kehrsatz “

Aufgabe 1
a) wahr, b) wahr, c) falsch, d) wahr

Aufgabe 2
a) falsch, b) falsch, c) wahr

Aufgabe 3
a) wahr, b) wahr, c) wahr

Aufgabe 4
1 c) "Wenn eine Zahl durch 5 teilbar ist, dann ist sie ungerade."
Der Satz ist wahr.
2 b) "Wenn ein Quadrat fünf Seiten hat, dann ist es ein Viereck."
Dieser Satz ist wahr. Er kann nicht widerlegt werden, da die Voraussetzung nie erfüllt ist.

Aufgabe 6
Der Kehrsatz lautet: "Wenn sie heute noch leben, sind sie nicht gestorben."Der Satz und sein Kehrsatz sind beide wahr.