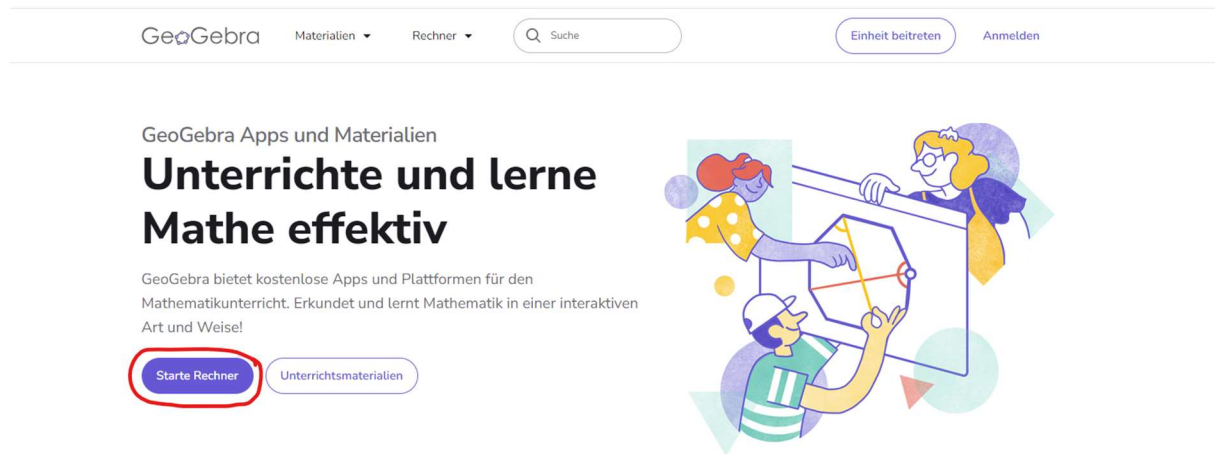


Geogebra-Kurzanleitung und Aufgaben zu Voronoi-Diagrammen

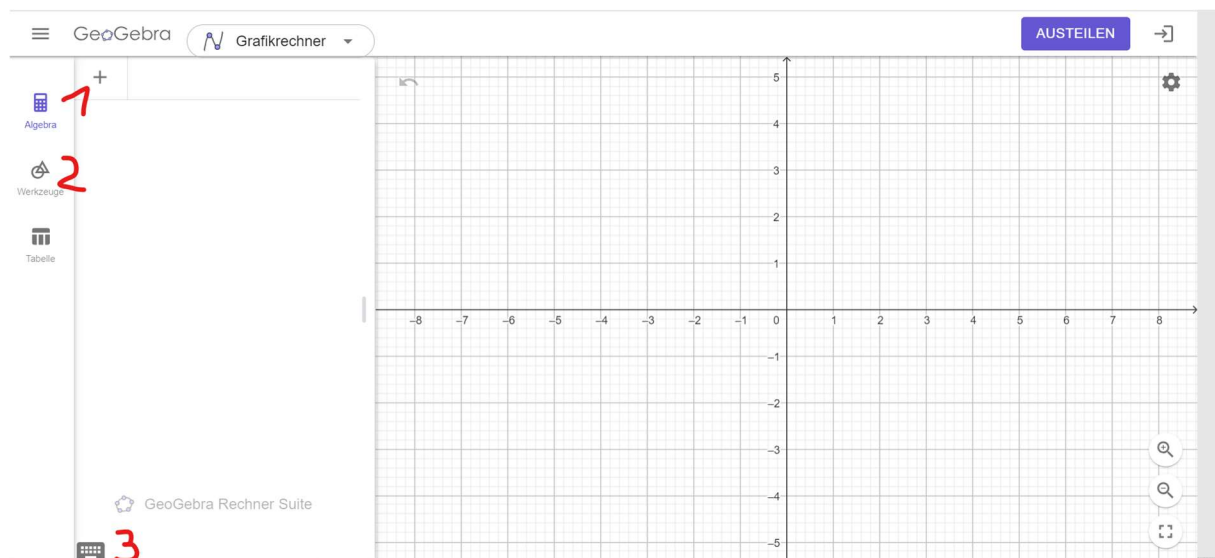
Vorbereitung

Geogebra im Browser öffnen:

Auf der Seite [geogebra.org](https://www.geogebra.org) „Starte Rechner“ anklicken:



Dann öffnet sich Geogebra:

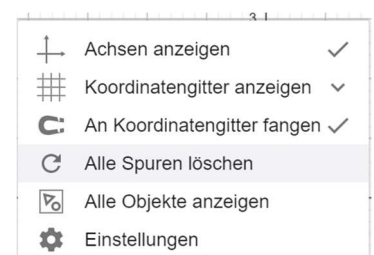


1: Algebra-Ansicht (aktuell eingestellt): Hier werden die vorhandenen geometrischen Objekte angezeigt.

2: Werkzeug-Ansicht: Hier werden die verfügbaren Methoden angezeigt, mit denen man Objekte erstellen kann.

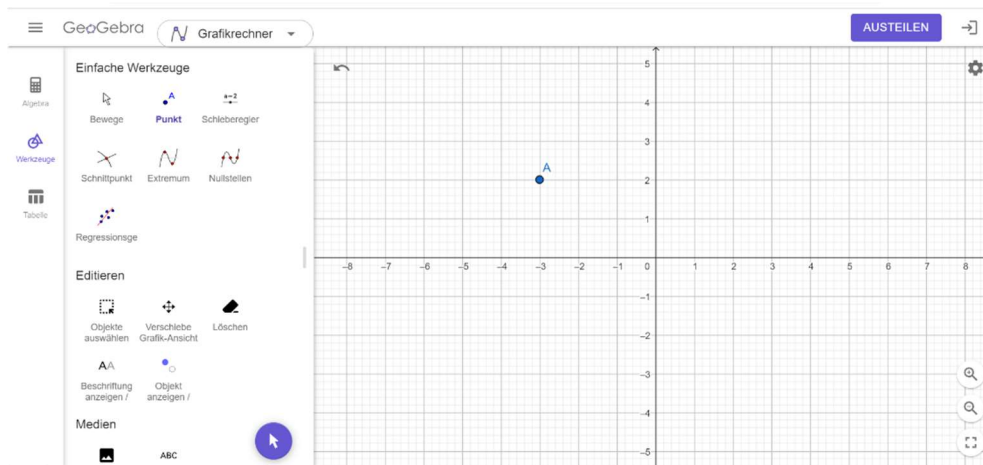
3: Tastatur (aktuell ausgeblendet): Für das Arbeiten ohne Tastatur.

Durch Klick in das Zeichenfeld können die Achsen und das Koordinatengitter ausgeblendet werden, indem der jeweilige Haken entfernt wird.



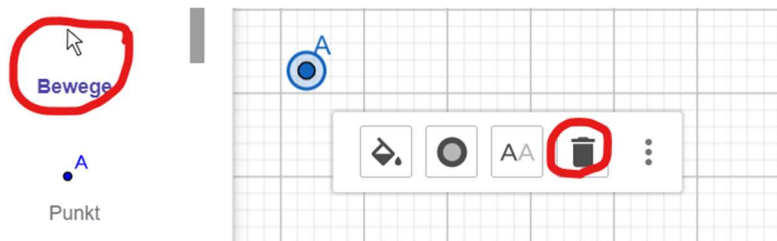
Aufgabe 1 (Voronoi-Diagramm von drei Punkten)

- Klick auf „Werkzeuge“, dann auf „Punkt“.
- Durch Klick in das Zeichenfeld können nun Punkte gezeichnet werden

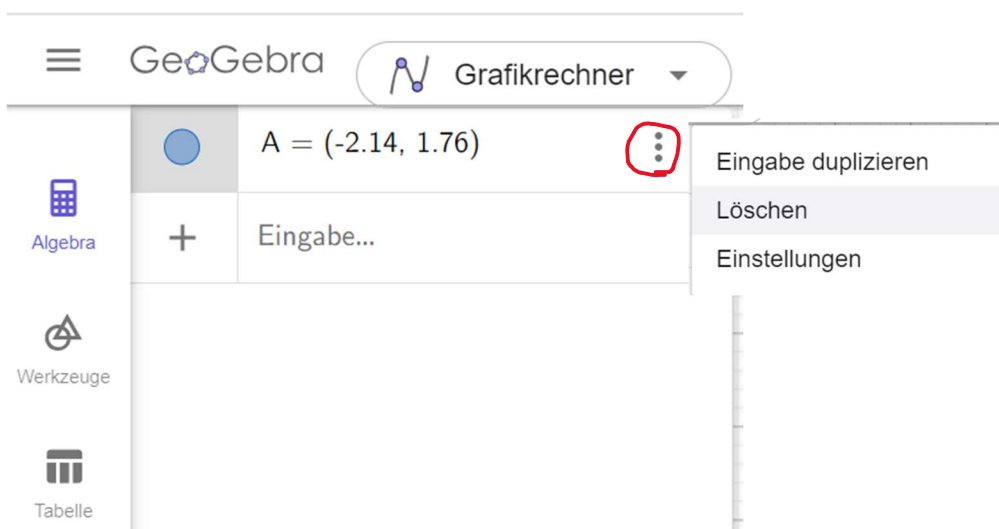


Punkt falsch gezeichnet? Es gibt verschiedene Möglichkeiten:

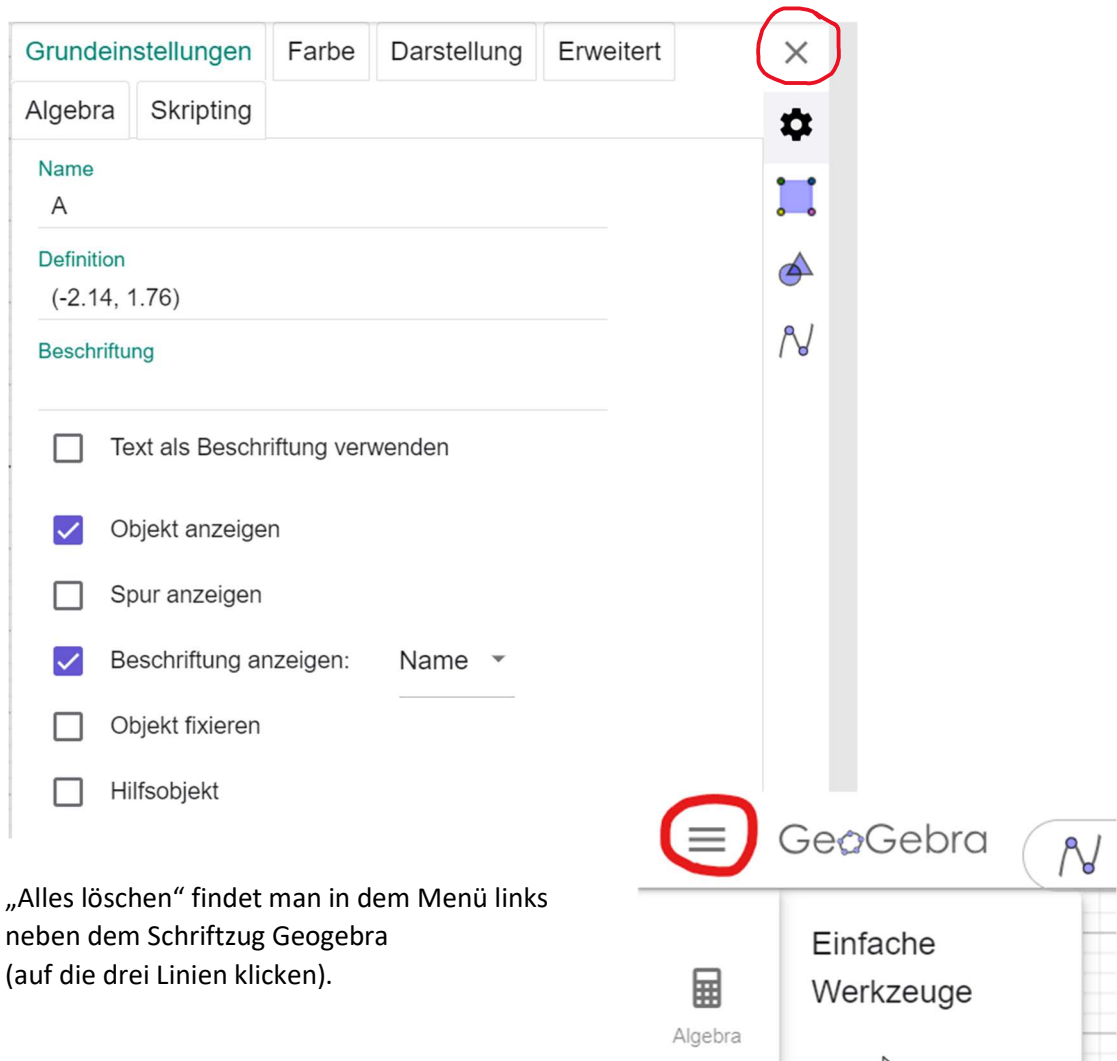
- „Bewege“ anklicken: Der Punkt kann mit der Maus verschoben werden
- „Bewege“ anklicken, den falschen Punkt mit rechter Maustaste anklicken. Ein Menü öffnet sich, dort den Papierkorb wählen.



- „Algebra“ anklicken und in die Algebra-Ansicht wechseln: Alle vorhandenen Objekte werden angezeigt und können durch Klick auf die 3 Punkte rechts bearbeitet werden.



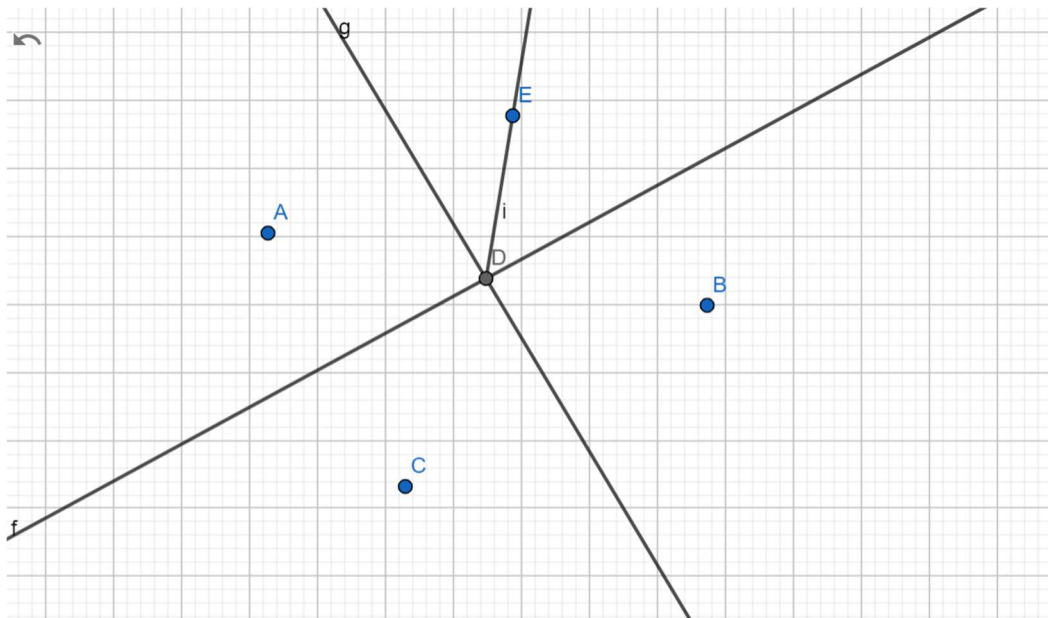
- Wichtig: Ein Werkzeug bleibt so lange aktiv, bis man ein anderes anwählt. So kann es leicht passieren, dass man etwas zeichnet, was man gar nicht haben möchte. Solange man nichts machen möchte, am besten den Pfeil („Bewege“) anklicken. Mit der ESC-Taste kann man eine nicht gewünschte Konstruktion abbrechen, bevor Objekte erstellt werden.
- Klick auf „Einstellungen“ führt zu weiteren Einstellmöglichkeiten, u.a. Ausblenden des Objekts und Ausblenden/Ändern der Beschriftung. Mit „X“ oben rechts wird das Fenster wieder geschlossen.



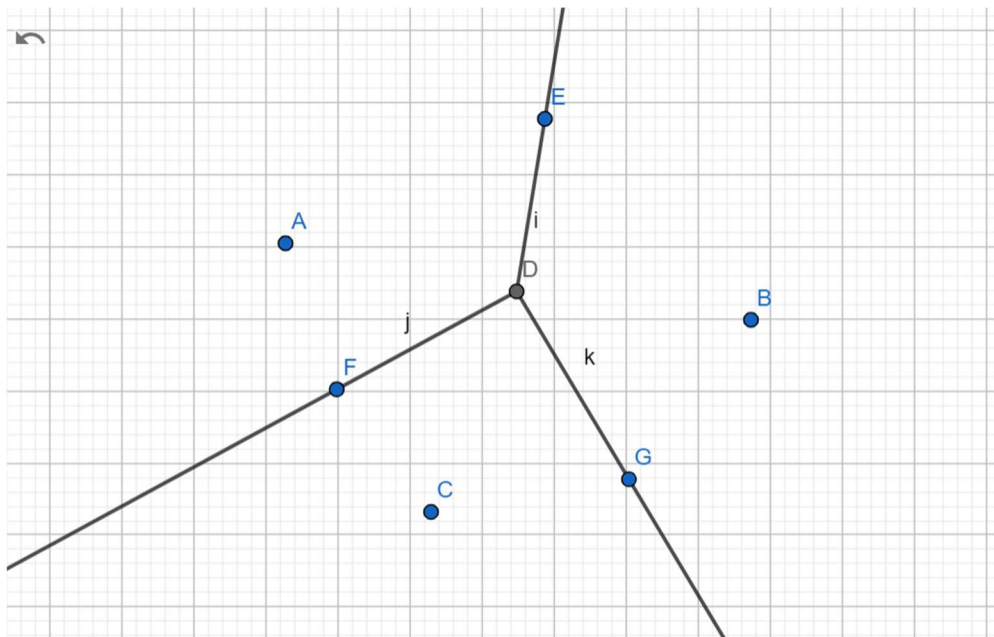
- „Alles löschen“ findet man in dem Menü links neben dem Schriftzug Geogebra (auf die drei Linien klicken).
- In der „Werkzeuge“-Ansicht finden wir außerdem unter „Konstruieren“ die Methode „Mittelsenkrechte“: Klickt man nacheinander 2 Punkte an, wird deren Mittelsenkrechte gezeichnet.

Aufgabe:

1. Zeichne 3 Punkte.
2. Zeichne die Mittelsenkrechten von je zwei dieser Punkte.
3. Verschiebe die Punkte und überzeuge dich, dass die Mittelsenkrechten sich immer in einem Punkt schneiden.
4. Konstruiere folgendermaßen das Voronoi-Diagramm der drei Punkte:
Klicke in der Werkzeug-Ansicht ganz unten auf „MEHR“. Zusätzliche Werkzeuge werden angezeigt.
Wähle in „Einfache Werkzeuge“ die Methode „Schnittpunkt“ und klicke nacheinander auf zwei Mittelsenkrechten, um ein Punkt-Objekt für den Schnittpunkt zu erstellen.
Entscheide, welcher Teil der Mittelsenkrechten zum Voronoi-Diagramm gehört. Wähle in „Linien“ die Methode „Strahl“ und klicke nacheinander auf den Schnittpunkt und den Teil der Mittelsenkrechten, der zum Voronoi-Diagramm gehört, um eine Halbgerade zu erstellen.
Klicke mit der rechten Maustaste auf den Teil der Mittelsenkrechten, der nicht zum Voronoi-Diagramm gehört und öffne „Einstellungen“. Entferne den Haken bei „Objekt anzeigen“, damit die Mittelsenkrechte nicht mehr angezeigt wird.



Verfahre so für alle drei Mittelsenkrechten.

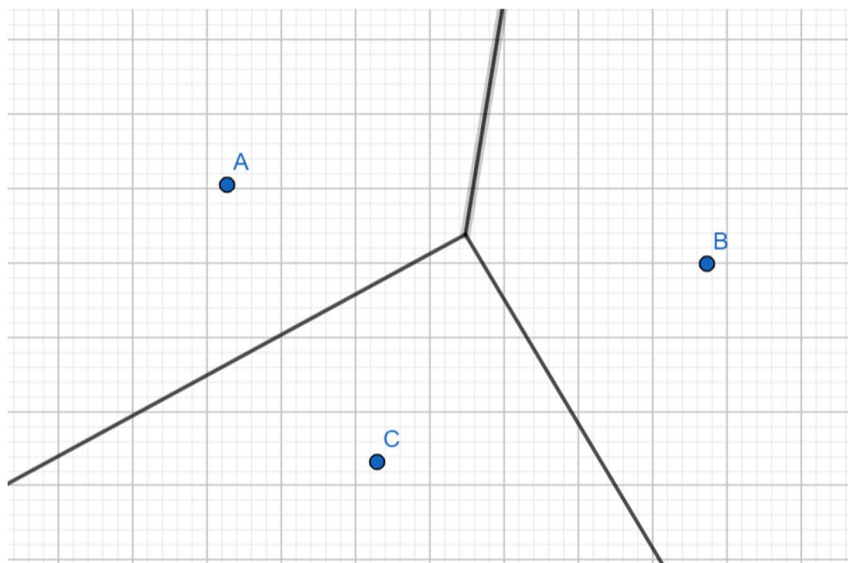


Wechsle in die Algebra-Ansicht und blende die Hilfspunkte (hier D,E,F,G) aus. Dies ist z.B. möglich, indem man auf den blauen Punkt klickt.

	E = Punkt(h)	
	= (-1.1202594784297, 3.7683)	
	i : Strahl(D, E)	
	= $y = 6.0943396226415x + 1$	

Blende die Bezeichnungen aus für die drei Halbgeraden i,j,k (über das Menü Einstellungen).

5. Verschiebe die Punkte A,B,C und beobachte, wie sich das Voronoi-Diagramm verändert.



Optional: Dreieck und Umkreis einzeichnen:

Klicke in der Werkzeug-Ansicht auf „MEHR“ und dann auf die Methode „Vieleck“ in der Kategorie „Vielecke“. Zeichne ein Dreieck, indem du die Punkte A-B-C-A anklickst.

Zeichne den Umkreis des Dreiecks, indem du in der Werkzeugansicht indem du in der Kategorie „Kreise“ die Methode „Kreis mit MP durch Punkt“ wählst und nacheinander den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und einen Eckpunkt des Dreiecks anklickst.

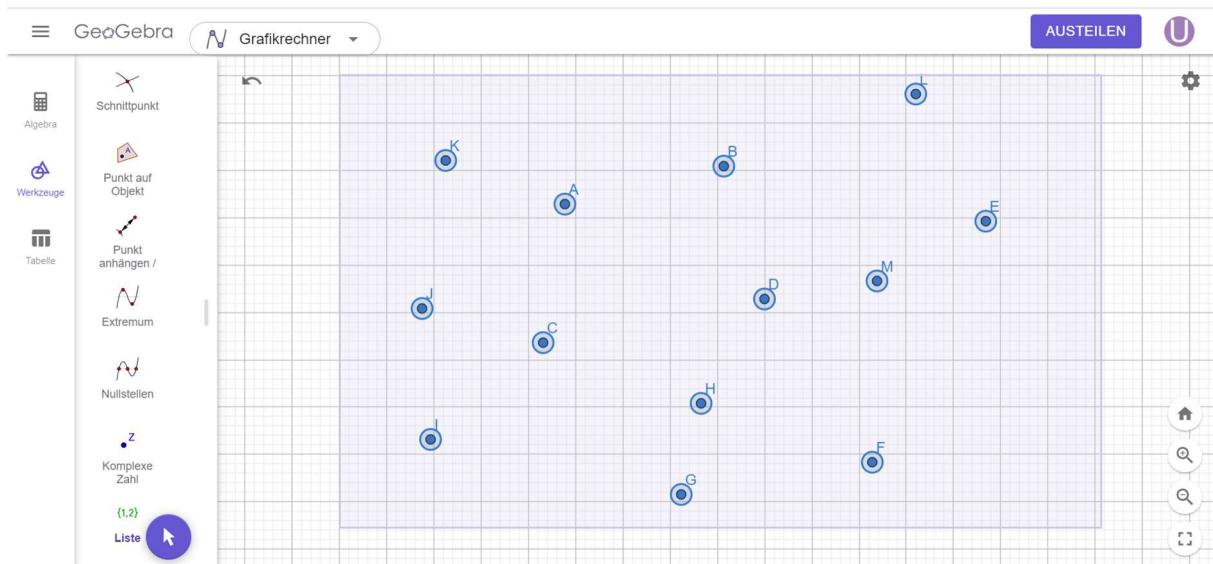
Aufgabe 2 (Voronoi-Diagramm von beliebig vielen Punkten)

Lösche alles aus Aufgabe 1.

Zeichne eine beliebige Anzahl von Punkten im Zeichenfeld.

Klicke in der Werkzeugleiste ganz unten „MEHR“ an und wähle die Methode „Liste“ in der Kategorie „Punkte“.

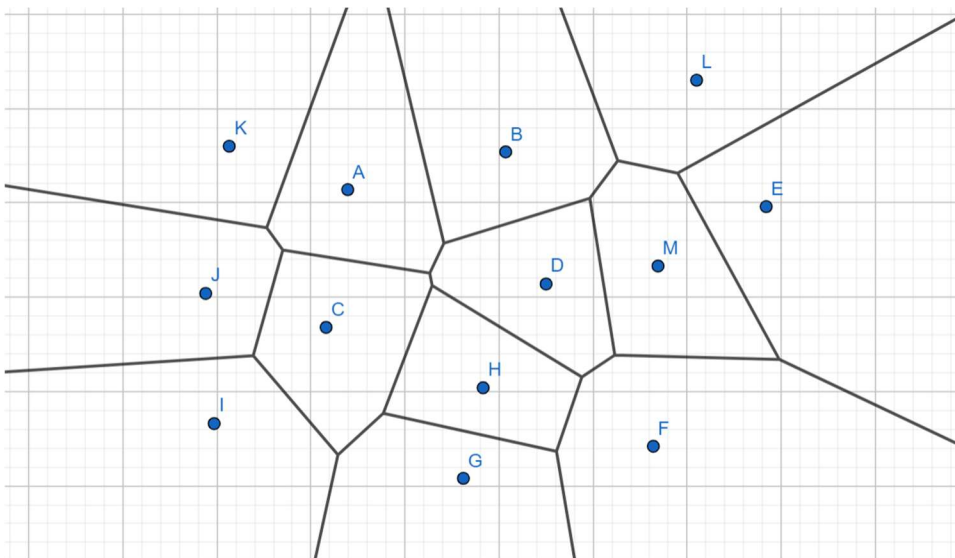
Ziehe mit der Maus ein Rechteck über alle Punkte



Überprüfe in der Algebra-Ansicht, ob eine Liste der markierten Punkte erstellt wurde.

Erstelle mit dem Textbefehl $\text{VORONOI}(I1)$ in der Algebra-Ansicht das Voronoi-Diagramm für die in der Liste $I1$ enthaltenen Eingabepunkte.

	$M = (3.38, 0.66)$	
	$I1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$ $= \{(-3.22, 2.28), (0.14, 3.08), (-$	
	$\text{Graph1} = \text{Voronoi}(I1)$	



Gehe wieder auf die Werkzeug-Ansicht, wähle „Bewegen“ und verschiebe einzelne Eingabepunkte. Das Voronoi-Diagramm wird automatisch passend dazu aktualisiert.

Aufgabe:

Verschiebe die Eingabepunkte, um die folgenden Fragen zu beantworten:

Wie viele Kanten des Voronoi-Diagramms treffen sich mindestens in einem Punkt? Wie viele Kantentreffen sich maximal in einem Punkt?

Beschreibe, unter welcher Voraussetzung sich mehr als 3 Kanten in einem Punkt treffen und überprüfe deine Vermutung.

Welche Punkte liegen in abgeschlossenen Voronoi-Zellen, welche in unbeschränkten Voronoi-Zellen? Überprüfe deine Vermutung (Hinweis: Verwende den Befehl `KonvexeHülle` in der Algebra-Ansicht)

Versuche, die Punkte so zu verschieben, dass alle Voronoi-Zellen unbeschränkt sind. Wie müssen die Punkte dafür liegen?

Versuche, die Punkte so zu verschieben, dass das Voronoi-Diagramm nur aus Geraden besteht.

Aufgabe 3 (Voronoi-Diagramme in der Umwelt)

Finde in der Umgebung Strukturen, die Voronoi-Diagramme sein könnten, und überprüfe die Vermutung mit Geogebra.

Beispiele:

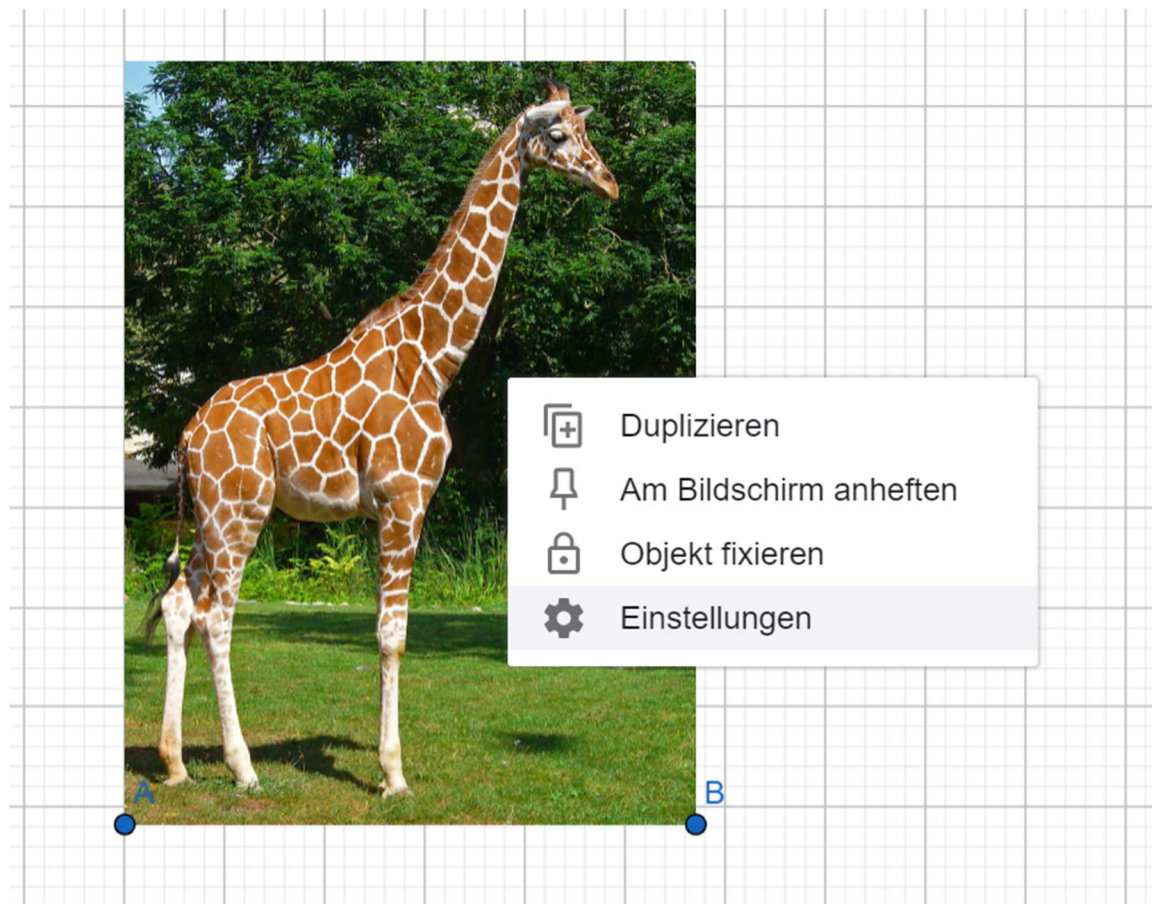
<https://www.pexels.com/it-it/foto/cibo-insalata-salutare-cena-4022177/>

<https://www.pexels.com/it-it/foto/cibo-foglie-albero-crescita-7789303/>

https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Giraffa_camelopardalis_reticulata_01.JPG

Importiere dazu das Bild¹ in Geogebra mit Hilfe der Methode „Bild“ in der Kategorie „Medien“.

Fixiere das Bild mit Rechtsklick und „Objekt fixieren“

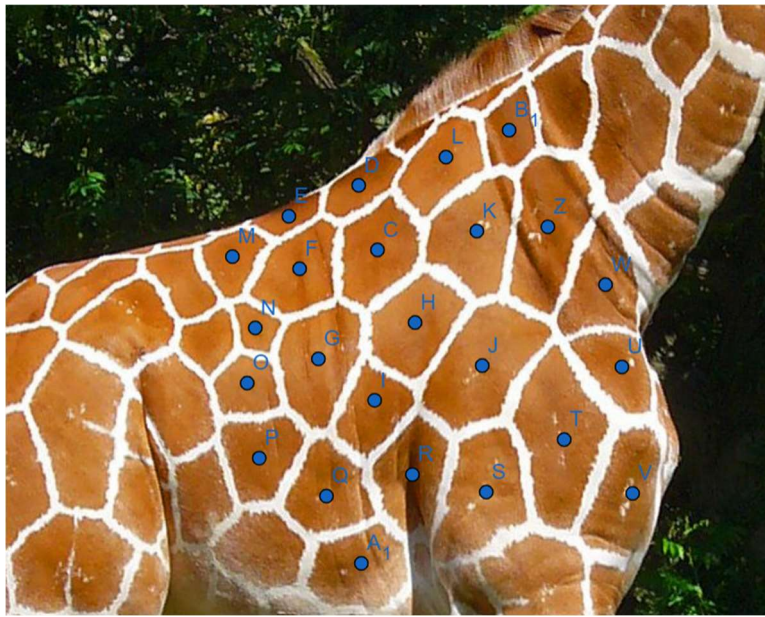


Blende die Eckpunkte des Bildes, hier A und B, durch Klick auf den Punkt in der Algebra-Ansicht aus.

Zeichne Punkte an den vermuteten Zentren der Voronoi-Zellen.

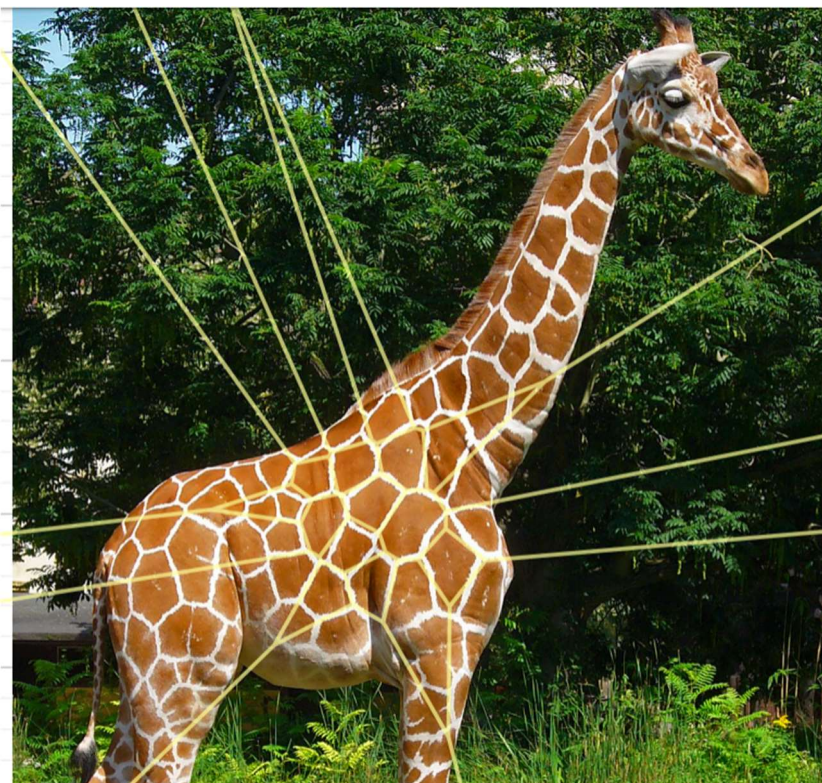
Algebra Werkzeuge		A = $\begin{pmatrix} -5.9 \\ -0.2 \end{pmatrix}$
		B = $\begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix}$
		Eingabe...

¹ Von H. Zell - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8823308>



Erstelle wie in der vorigen Aufgabe das Voronoi-Diagramm dazu.

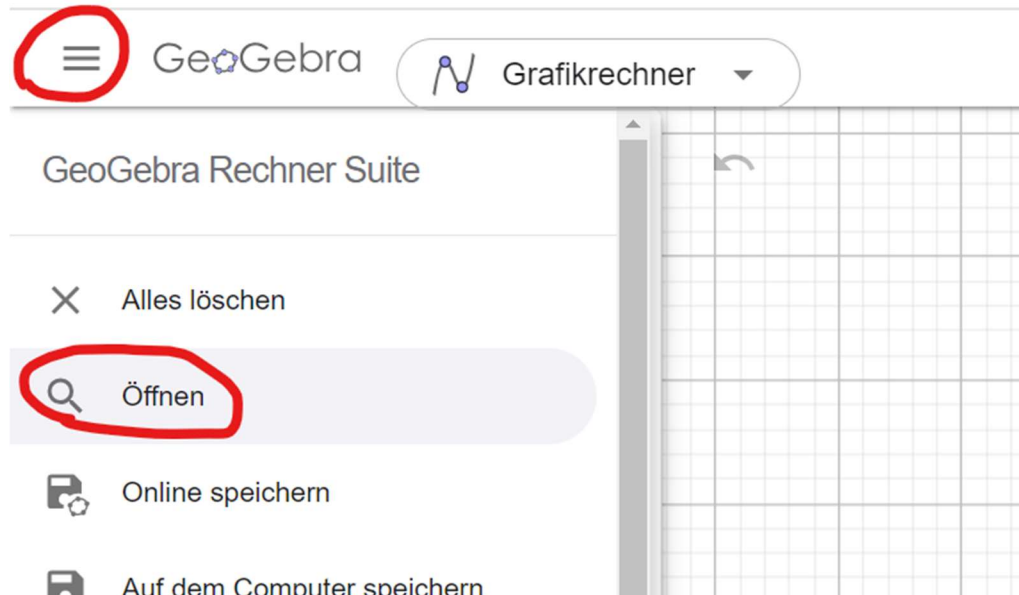
Durch Rechtsklick auf eine Linie des Voronoi-Diagramms und Öffnen der Einstellungen kann man bei Bedarf im Reiter „Farbe“ die Farbe des Voronoi-Diagramms ändern.



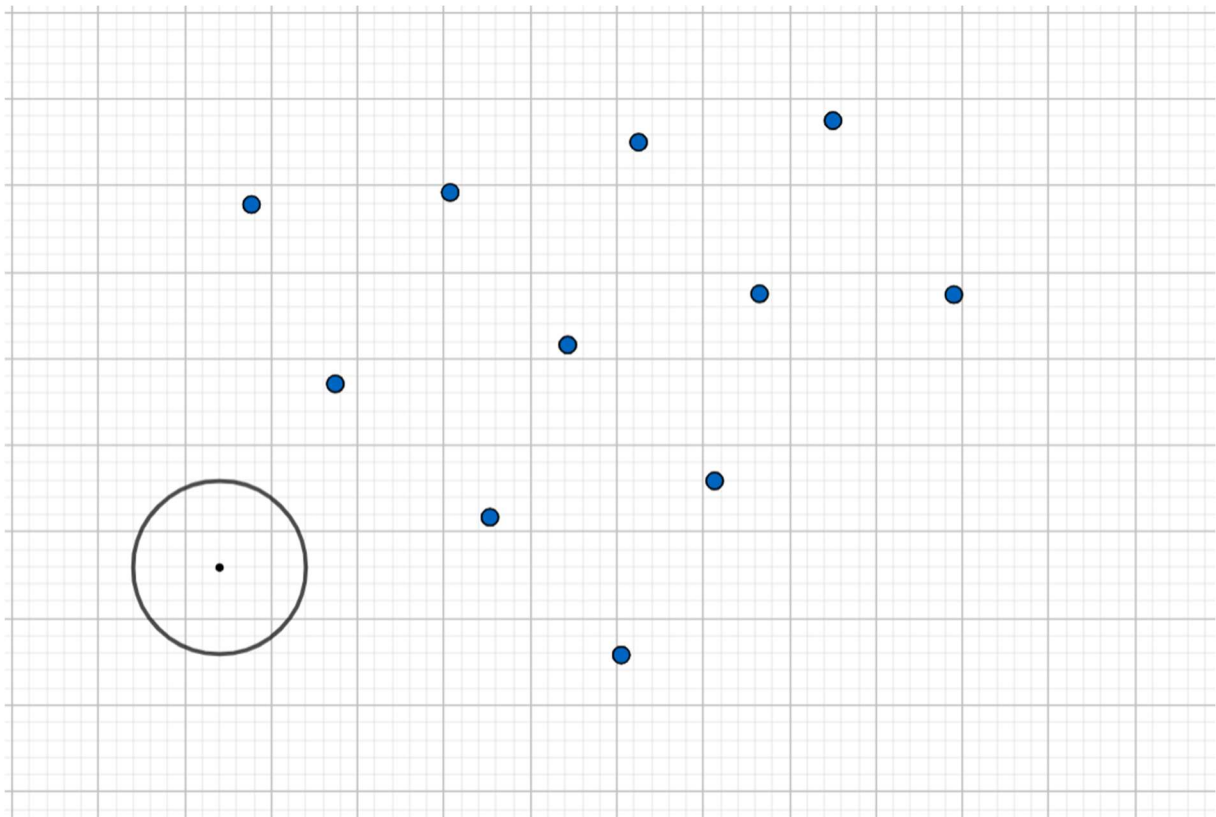
Bei Bedarf die Punkte, die die Zentren markieren, in der Algebra-Ansicht ausblenden.

Aufgabe 4 (Motivation Roadmap)

Die Datei MatheCupVoronoi.ggb herunterladen, an geeigneter Stelle speichern und öffnen. Dazu das Menü links oben über die 3 Striche öffnen, „lokale Datei“ wählen und MatheCupVoronoi.ggb suchen.



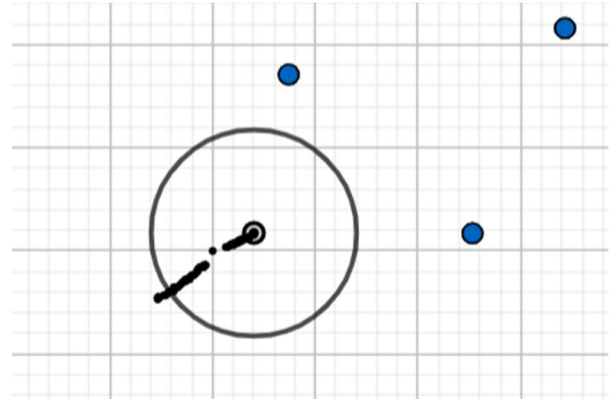
Man erhält folgendes Bild:



Wenn man nicht alle Punkte sehen kann, das Zeichenblatt mit gedrückter Maustaste verschieben, oder die Ansicht mit dem Mausekranz verkleinern.

Aufgabe:

Klicke die Methode „Bewegen“ an, und verschiebe den Kreis, indem du seinen Mittelpunkt verschiebst. Bewege den Kreis zwischen den blauen Punkten hindurch, ohne sie zu berühren. Der Mittelpunkt hinterlässt eine Spur.

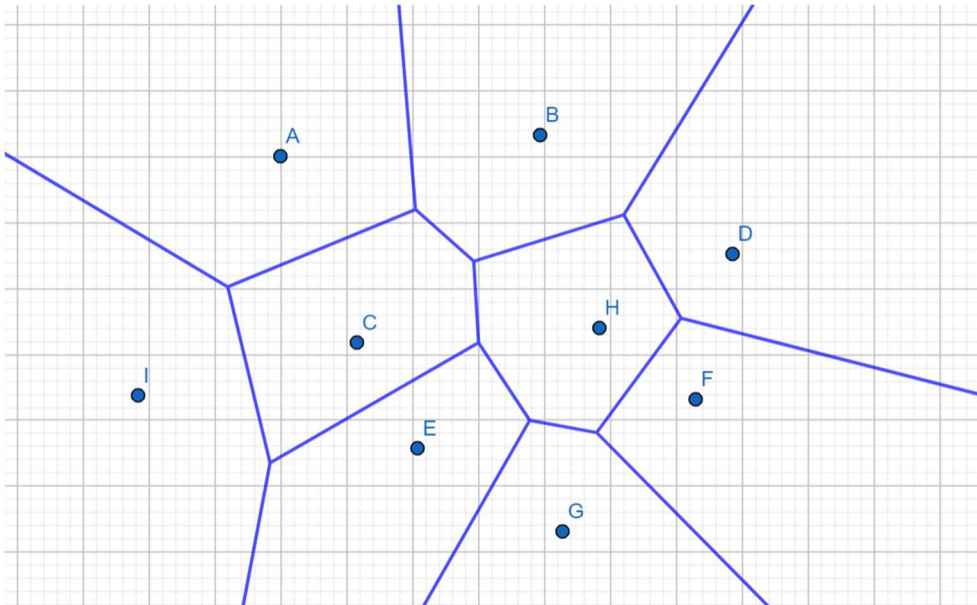


Hinweis: Spur löschen durch STRG-F oder Klick irgendwo in die Grafikansicht und „Alle Spuren löschen“.

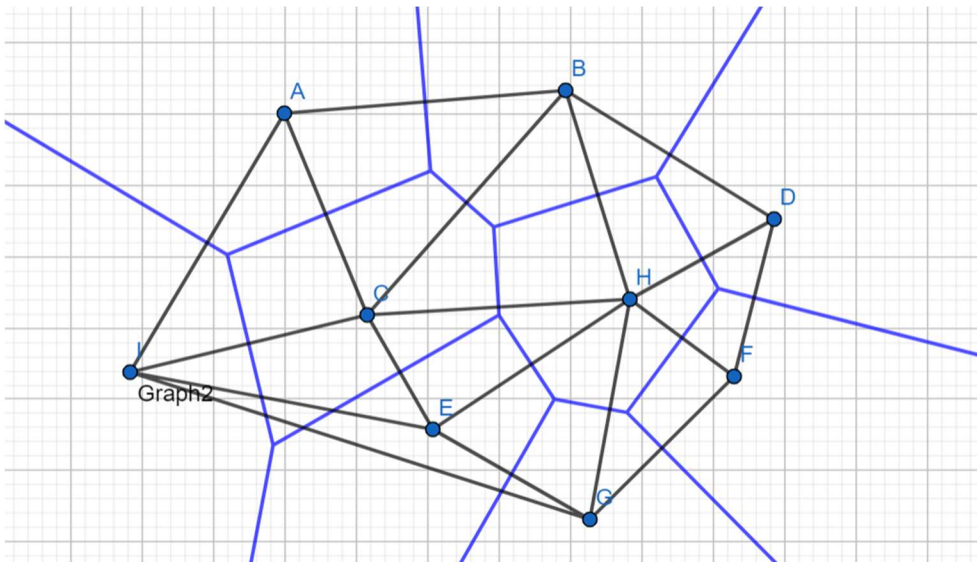
Schiebe nun den Kreis zwischen allen blauen Punkten hindurch. Woran erinnert das Bild der Spuren, das entsteht? Wie kann man das erklären?

Aufgabe 5 (Delaunay-Triangulierung)

Erstelle wie in Aufgabe 2 ein Voronoi-Diagramm einer Menge von Eingabepunkten. Ändere die Farbe des Voronoi-Diagramms durch Rechtsklick auf eine Kante des Voronoi-Diagramms in den Einstellungen im Reiter „Farbe“



Erzeuge mit dem Befehl „DelaunayTriangulation(Liste)“ eine Delaunay-Triangulierung der Eingabepunkte.



Verschiebe Eingabepunkte, um folgende Fragen zu beantworten:

Besteht die Delaunay-Triangulierung immer aus Dreiecken? Was passiert, wenn mehr als drei Eingabepunkte auf einem Kreis liegen?