

Ebene Kurven und Zykloiden

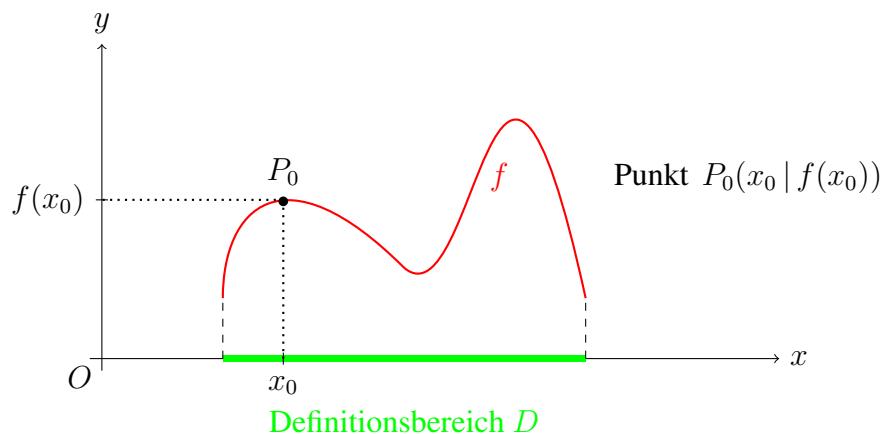
1. Ebene Kurven

Bisher wurden bei den Schülerinnen und Schülern reelle Funktionen in einer Variablen behandelt.

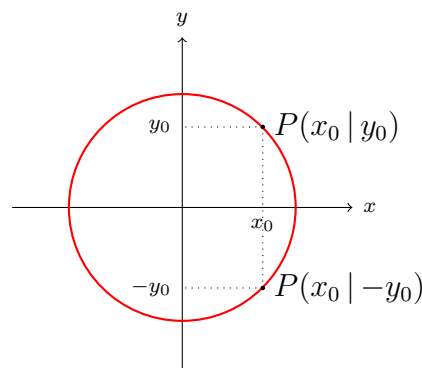
Eine reelle Funktion f ordnet jedem x , das in einem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion gegeben ist, genau ein Bild $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zu: $x \mapsto f(x) = y$

Es wird kurz für die Funktion f die Funktionsvorschrift $y = f(x)$, $x \in D$, geschrieben. Oft ist es vorteilhaft, zwischen dem Objekt Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und der reellen Zahl $f(x)$ zu unterscheiden.

Zur graphischen Veranschaulichung stellt man eine Funktion f durch ihr Schaubild in einem Achsenkreuz mit Ursprung O , horizontaler x -Achse und vertikaler y -Achse dar. Für die Punkte P auf dem Schaubild von f wird die sogenannte Koordinatendarstellung $P(x | f(x))$, $x \in D$, eingeführt. Um einen Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ bei gegebenem Koordinatensystem einzumessen, muss man (vorzeichenbehaftet) x_0 Einheiten von O aus auf der x -Achse abtragen und dann von dort parallel zur y -Achse (vorzeichenbehaftet) $f(x_0)$ abtragen.



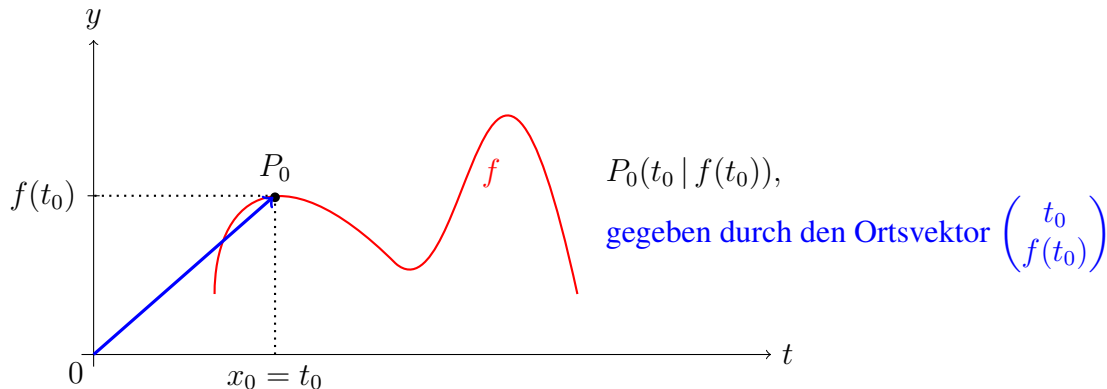
Durch Funktionsschaubilder lassen sich aber nicht alle ebenen Kurven darstellen. Ein Kreis ist z.B. kein Funktionsschaubild, da es ein x_0 gibt, dem zwei Kreispunkte $P_1(x_0 | y_0)$ und $P_2(x_0 | -y_0)$ zugeordnet werden müssen, um den Kreis vollständig darzustellen.



Deshalb sind Funktionsschaubilder spezielle ebene Kurven, aber nicht jede ebene Kurve kann (als Ganzes) durch eine Funktion dargestellt werden. Daher benötigt man eine allgemeinere Beschreibung ebener Kurven als Erweiterung von $y = f(x)$.

Am besten stellt man sich eine ebene Kurve als Bahnkurve (Spur) eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t vor. Bei einem Schaubild einer Funktion f wird die x -Achse dann als Zeitachse (t -Achse) angesehen. Das Teilchen ist zur Zeit $t = x$ dann am Ort $(t | f(t))$. Die Zeitachse wird dabei von links nach rechts linear in t durchgegangen und zu jedem t das $f(t)$ ermittelt und dann $(t | f(t))$ als Schaubildpunkt in die Ebene eingezeichnet.

Man nennt die Zuordnung $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, eine **Parameterdarstellung** des Funktionsschaubilds von f . Die Schreibweise $\begin{pmatrix} t_0 \\ f(t_0) \end{pmatrix}$ für ein $t = t_0$ ist ein Zweivektor, der geometrisch durch einen Pfeil mit Beginn am Ursprung des Koordinatensystems zu dem Punkt $P_0(t_0 | f(t_0))$ dargestellt wird. Dieser Pfeil wird **Ortsvektor des Punkts P_0** genannt. Ortsvektoren werden z.B. mit \vec{x} bezeichnet.



Diese Darstellung lässt sich auf beliebige ebene Kurven verallgemeinern.

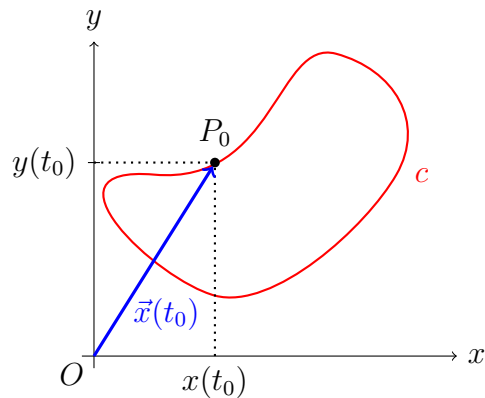
Definition:

Eine **Parameterdarstellung** bzw. eine **Parametrisierung** einer ebenen Kurve c ist eine Abbildung \vec{x} , die (der Zeit) $t \in D$ den von t abhängigen Zweivektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ zuordnet.

Kurz: $\vec{x} : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ oder $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$

$x(t)$ heißt die **x -Koordinate**, $y(t)$ die **y -Koordinate** (zur Zeit t) der Parameterdarstellung.

Zu jeder Stelle $t \in D$ ist durch den Ortsvektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ein Kurvenpunkt $P(x(t) | y(t))$ der Kurve c gegeben, den Ort des Teilchens auf seiner Bahnkurve c zur Zeit t . Ein Punkt $P_0(x(t_0) | y(t_0))$ von c wird in ein Koordinatensystem mit x - und y -Achse wie folgt eingetragen: Mit t_0 wird $x(t_0), y(t_0)$ berechnet, dann werden $x(t_0)$ Einheiten (vorzeichenbehaftet) auf der x -Achse abgetragen und dann anschließend parallel zur y -Achse (vorzeichenbehaftet) $y(t_0)$ Einheiten abgetragen. Der Endpunkt ist der gesuchte Punkt P_0 .



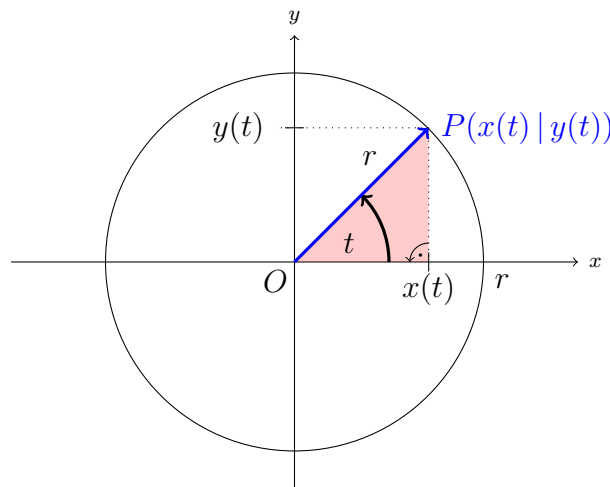
$$P_0(x(t_0) | y(t_0)),$$

$$\text{gegeben durch den Ortsvektor } \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

Durch die Funktion $t \mapsto x(t)$ ist nicht nur ein lineares Durchgehen der x -Achse von links nach rechts für ansteigendes t möglich, sondern ein beliebiges Durchlaufen von Teilen der x -Achse auch z.B. von rechts nach links. Dies ermöglicht die Darstellung ebener Kurven, die allgemeiner als Funktionsschaubilder sind.

Beispiel: Parametrisierung eines Kreises mit Radius r mit Mittelpunkt am Ursprung O :

Zu einem Kreispunkt P auf dem Kreis mit Radius r gehört ein Winkel t , angegeben z.B. im Gradmaß. (t ist also nicht notwendig eine Zeitangabe.)



Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck (in der Abbildung in rot) mit Hypotenusenlänge r , so erhält man

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \cos(t) = \frac{x(t)}{r}, \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin(t) = \frac{y(t)}{r}$$

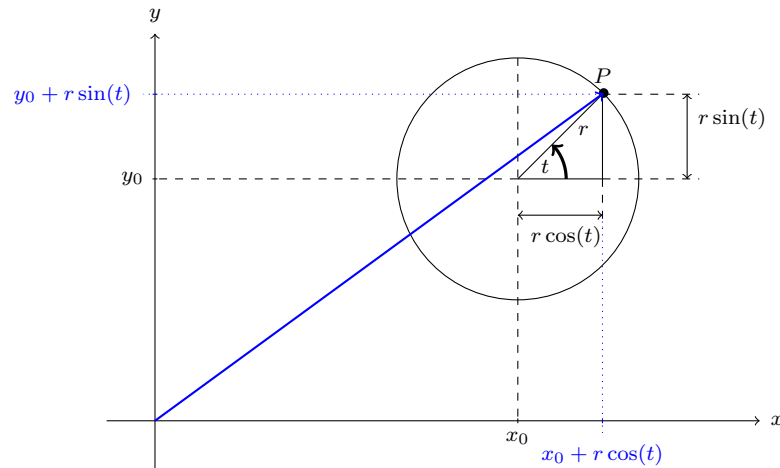
Die x -Koordinate von P ist somit $x(t) = r \cos(t)$, die y -Koordinate von P lautet $y(t) = r \sin(t)$.

Somit ist die Parameterdarstellung des Kreises $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 360^\circ)$.

Wenn der Kreis mit Radius r in der Ebene verschoben wird mit dem neuen Mittelpunkt $M(x_0 | y_0)$, so ist die Parameterdarstellung des Kreises

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos(t) \\ y_0 + r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 360^\circ).$$

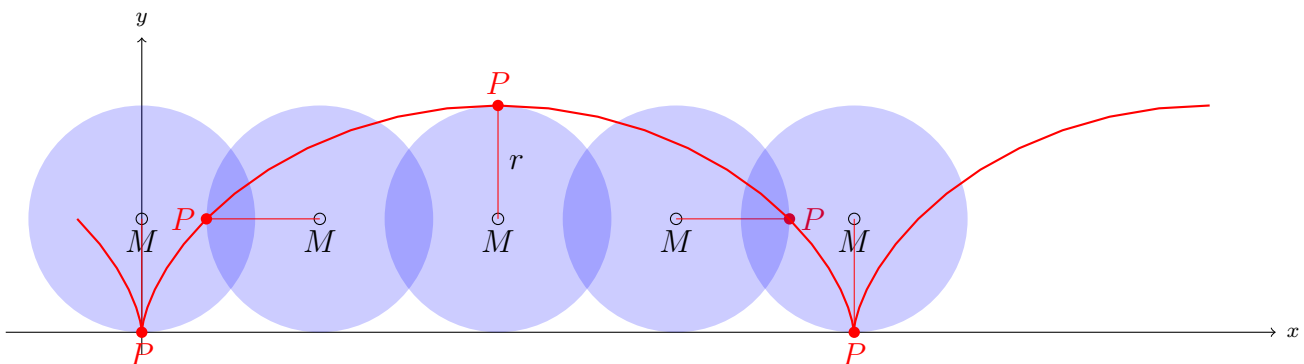
Graphisch sieht man dies wie folgt für einen Kurvenpunkt P mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.



2. (Gewöhnliche) Zykloide

Ein Rad (Kreisscheibe) vom Radius $r > 0$ in der xy -Ebene rollt gleichmäßig (ohne zu gleiten) nach rechts die x -Achse entlang. Die durch einen Punkt P auf dem Umfang des Kreises beschriebene Kurve heißt (*gewöhnliche*) *Zykloide*.

Im folgenden Bild ist in rot die Zykloide und die Startposition des Rads links sowie vier weitere Positionen des Rads (in blau) zu verschiedenen Zeitpunkten gezeichnet.



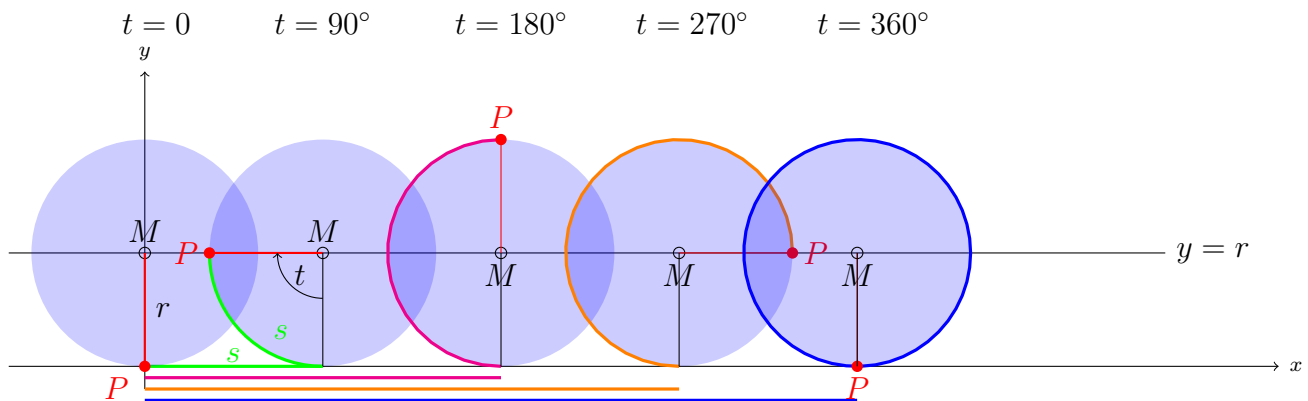
Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass der Punkt P zur Zeit $t = 0$ im Ursprung liegt. Der Zeit-Parameter t sei als Winkel angegeben. Den fünf Positionen des Rads im Bild ist von links nach rechts $t = 0^\circ, t = 90^\circ, t = 180^\circ, t = 270^\circ, t = 360^\circ$ zugeordnet.

Gesucht ist die Parametrisierung $\vec{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, der Zykloide in der xy -Ebene.

Zu beachten ist dabei die gleichförmige geradlinige Bewegung des Radmittelpunkts M , die sich mit einer Drehbewegung im Uhrzeigersinn mit Winkel t von P relativ zu M überlagert (mittels Addition).

- Wir betrachten zuerst allein die Bewegung von M :

Die Bewegung des Kreismittelpunkts M läuft auf einer Parallelen zur x -Achse im Abstand r , somit ist $y_M(t) = r$ für alle t .



Die Strecke s , die das Rad in x -Richtung zurückgelegt hat, ist die Strecke auf dem Radumfang, auf der das Rad gerollt ist, da das Rad nicht gleitet. s ist die Bogenlänge des zugehörigen Kreisbogens zum Mittelpunktswinkel t .

Im obigen Bild ist die Strecke s für $t = 90^\circ$ in grün, die Strecke für $t = 180^\circ$ in magenta, für $t = 270^\circ$ in orange und die Strecke s für $t = 360^\circ$ in blau angegeben.

Die Strecke s berechnet sich so, dass man s zum Winkel t ins Verhältnis mit dem gesamten Kreisumfang $2\pi r$ zum zugehörigen Winkel 360° setzt (π Kreiszahl).

$$\frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{360} \iff s = \frac{\pi r}{180} t$$

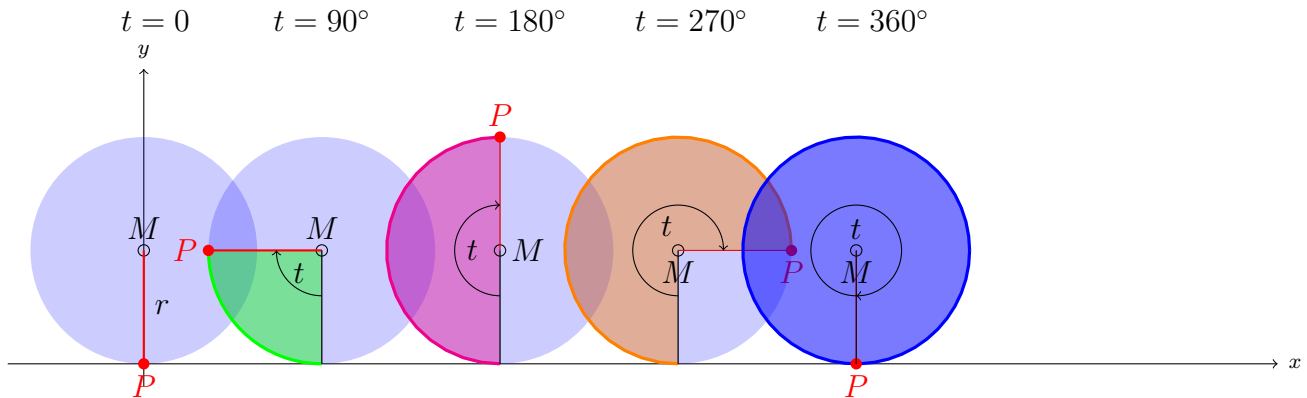
Somit ist $x_M(t) = s = \frac{\pi r}{180} t$ und $x_M(0) = 0$.

Eine Parameterdarstellung der Bewegung von M lautet daher:

$$\vec{x}_M(t) = \begin{pmatrix} x_M(t) \\ y_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi r}{180} t \\ r \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

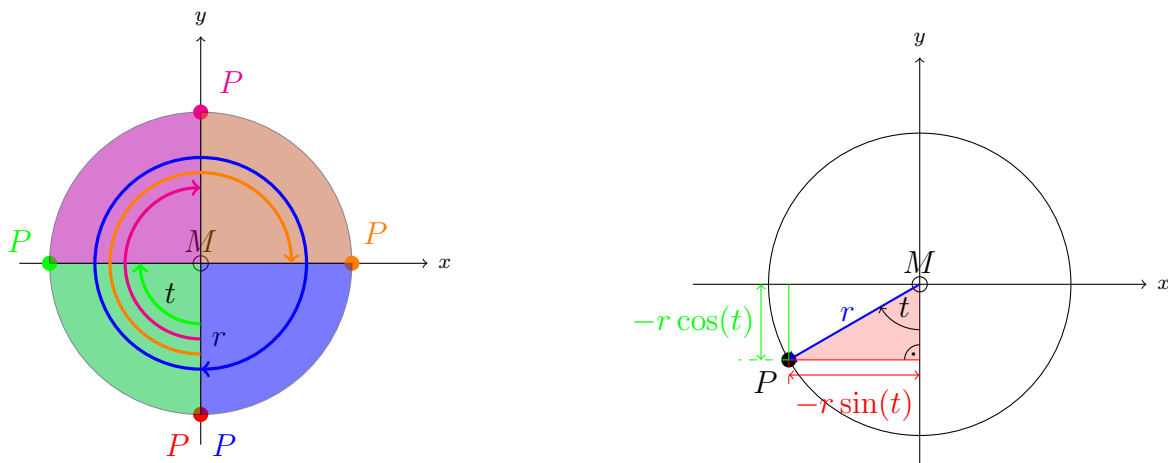
Es ist $\vec{x}_M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$, $\vec{x}_M(360) = \begin{pmatrix} 2\pi r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Kreisumfang} \\ r \end{pmatrix}$.

- Nun betrachten wir die Drehbewegung von P relativ zu M :



Relativ zu M findet eine Drehbewegung von P um M im Uhrzeigersinn statt ausgehend von der unteren Position.

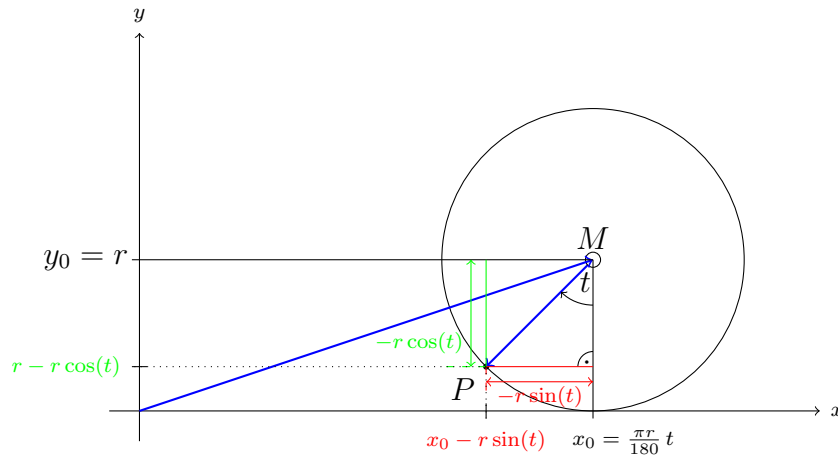
Am besten erkennt man dies, indem man alle Lagen von M bei verschiedenem t in den Ursprung zusammenschiebt und zuerst den Ortsvektor von P in diesem Koordinatensystem bestimmt.



Wenn man das rote rechtwinklige Dreieck im rechten oberen Bild betrachtet, so lassen sich die Koordinaten von P ablesen: $P(-r \sin(t) \mid -r \cos(t))$.

Der Ortsvektor von P zur Zeit t ist $\vec{x}_{MP}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ -r \cos(t) \end{pmatrix}$ mit $\vec{x}_{MP}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$.

- Die gesamte Bewegung von P ist nun gegeben durch jeweils die Summe der x - bzw. der y -Koordinaten wegen der Überlagerung der Bewegung von M und der Bewegung von P relativ zu M .

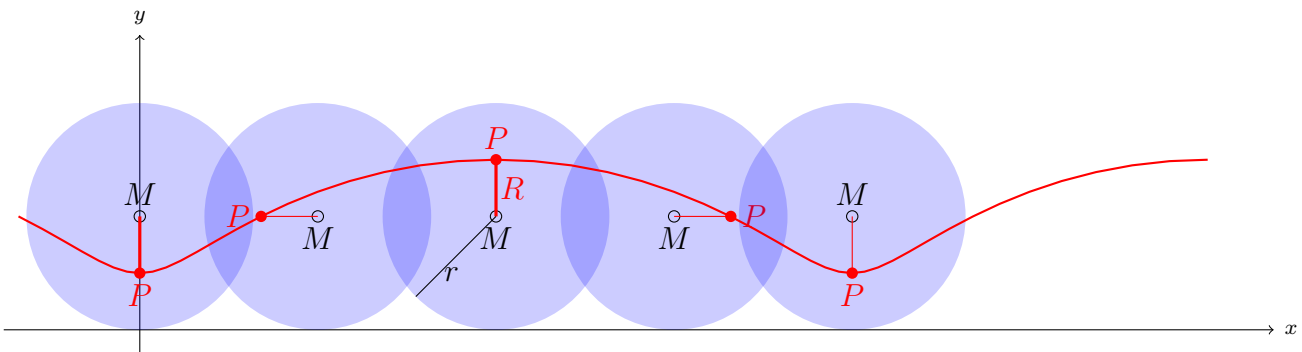


Somit erhält man:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_M(t) + \vec{x}_{MP}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi r}{180} t + (-r \sin(t)) \\ r + (-r \cos(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi r}{180} t - r \sin(t) \\ r - r \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Parametrisierung der (gewöhnlichen) Zyklode mit einem Kreis vom Radius r für $t \in \mathbb{R}$. Die gewöhnliche Zyklode weist Spitzen auf an den Stellen $t = 360^\circ \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Wird der Punkt P radial ins Innere des Rades verschoben, dann ist seine Bahnkurve beim Abrollen des Rads eine *verkürzte Zyklode*. Sei der Radius des Rads weiterhin mit r bezeichnet und bezeichne R den Abstand von P zum Radmittelpunkt M .

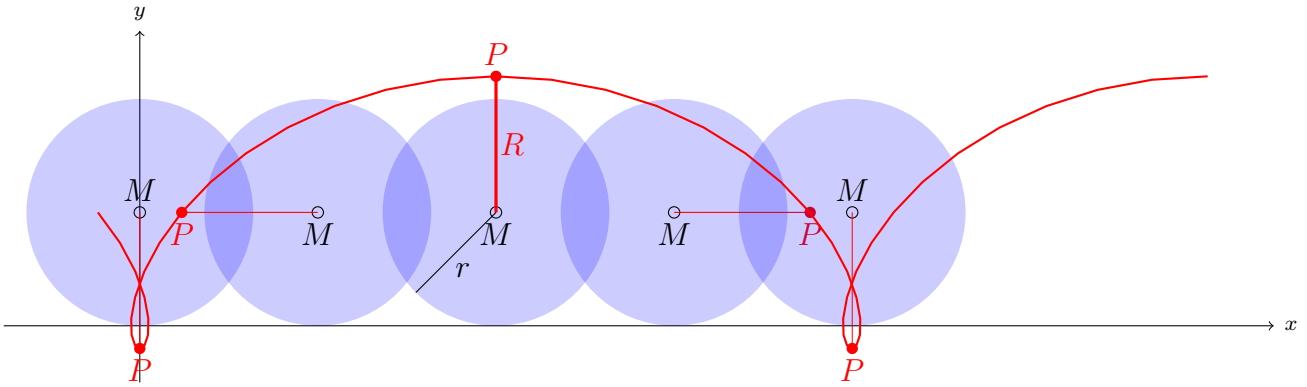


Die Parametrisierung der verkürzten Zykliden lässt sich einfach erhalten, indem man bei der Bewegung von P relativ zu M den Radius r durch den Abstand R ersetzt:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi r}{180} t - R \sin(t) \\ r - R \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

mit $R < r$.

Wird der Punkt P radial ins Äußere des Rads verschoben (z.B. befestigt an einem radialen Stab), dann ist seine Bahnkurve beim Abrollen des Rads eine *verlängerte Zyklode*. r ist wieder der Kreisradius und R der Abstand von P zu M .



Die Parametrisierung der verlängerten Zyклоide ist analog

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi r}{180} t - R \sin(t) \\ r - R \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

aber nun mit $R > r$.

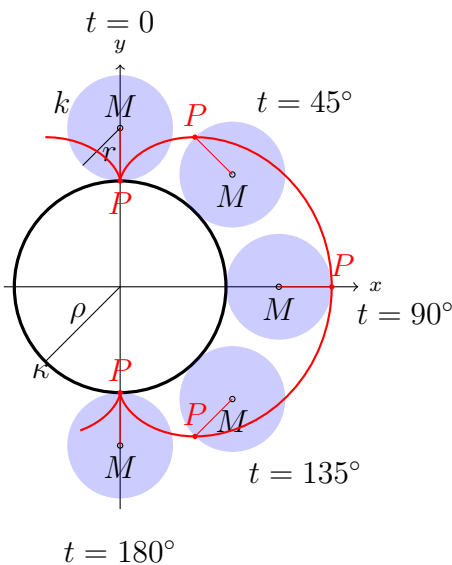
3. Verallgemeinerungen der Zyклоide

Prinzipiell kann man nun den Kreis längs einer beliebigen glatten Kurve rollen lassen. Wir betrachten hier lediglich die klassischen Verallgemeinerungen zur Epi- und Hypozykloiden.

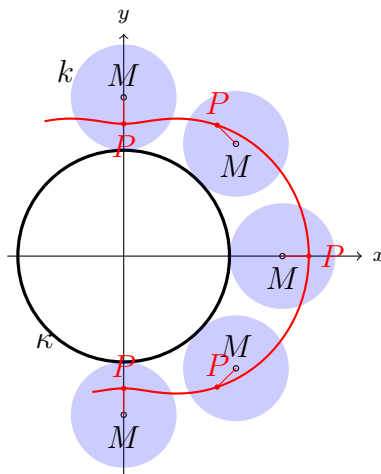
Epizykloiden:

Es rollt der Kreis k mit Radius r *außen* auf einem Kreis κ mit Radius ρ . Der Punkt P kann sich auf dem Kreisumfang von k (*gewöhnliche Epizykloide*), innerhalb von k (*verkürzte Epizykloide*) oder außerhalb von k befinden (*verlängerte Epizykloide*).

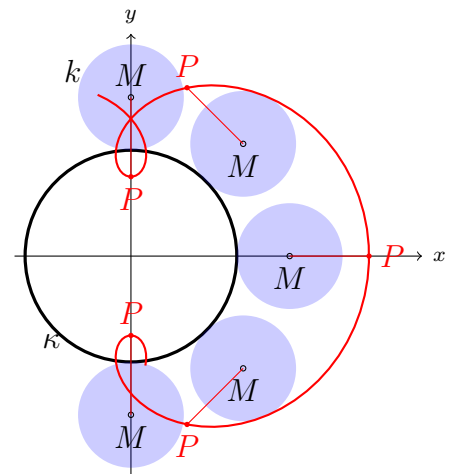
(gewöhnliche) Epizykloide



verkürzte Epizykloide

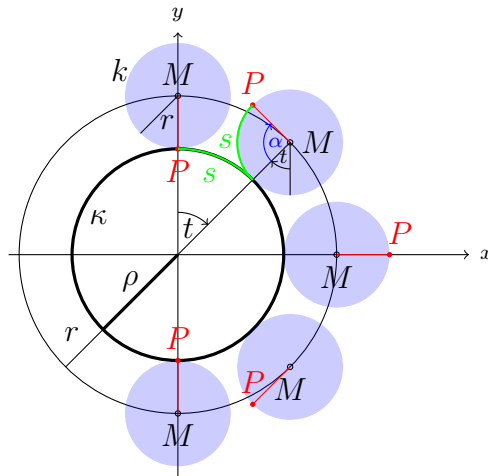


verlängerte Epizykloide



Herleitung der Parametrisierung der gewöhnlichen Epizykloiden:

- Bewegung von M : M bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $\rho + r$ mit dem Uhrzeigersinn beginnend bei der oberen Position. Der Winkel t sei der Winkel zwischen der y -Achse und dem Radialstrahl zum momentanen Berührungspunkt der beiden Kreise.



Daher lautet die Parametrisierung der Bewegung von M $\vec{x}_M(t) = \begin{pmatrix} (\rho + r) \sin(t) \\ (\rho + r) \cos(t) \end{pmatrix}$.

- Bewegung von P relativ zu M :

Der Winkel von P an M von der Vertikalen bis zum Radialstrahl von P ist $t + \alpha$, s. obiges Bild. Die Bewegung des Punktes P relativ zu M ist eine Drehung mit dem Winkel $t + \alpha$ im Uhrzeigersinn von der unteren Position ausgehend ($t = 0$).

Außerdem ist die Bogenlänge s auf dem Kreis κ (wie bei der gewöhnlichen Zyckloide) einerseits gegeben durch $s = \frac{\pi\rho}{180} t$, dies ist auch die Kreisbogenlänge auf dem Kreis k , zu der der Winkel α gehört, da k auf κ rollt ohne zu gleiten. Daher ist andererseits $s = \frac{\pi r}{180} \alpha$. Nach Gleichsetzen der

Formeln für s lässt sich α in Abhängigkeit von t ausdrücken: $\alpha = \frac{180}{\pi r} \cdot \frac{\pi\rho}{180} t = \frac{\rho}{r} \cdot t$.

Damit ist $t + \alpha = t + \frac{\rho}{r} t = (1 + \frac{\rho}{r})t$. Somit ist die Bewegung von P relativ zu M

$$\vec{x}_{MP} = \begin{pmatrix} -r \sin(t + \alpha) \\ -r \cos(t + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin((1 + \frac{\rho}{r})t) \\ -r \cos((1 + \frac{\rho}{r})t) \end{pmatrix}$$

Die trigonometrischen Funktionen ergeben sich aus ähnlichen Betrachtungen wie bei der gewöhnlichen Zyckloide.

- Die gesamte Bewegung von P lässt sich nun angeben durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_M(t) + \vec{x}_{MP}(t) = \begin{pmatrix} (\rho + r) \sin(t) - r \sin((1 + \frac{\rho}{r})t) \\ (\rho + r) \cos(t) - r \cos((1 + \frac{\rho}{r})t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Parametrisierung der (gewöhnlichen) Epizykloide.

Die verkürzte Epizykloide, bei der der Abstand von P zu M R ist, hat die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\rho + r) \sin(t) - R \sin\left(\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)t\right) \\ (\rho + r) \cos(t) - R \cos\left(\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)t\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

mit $R < r$.

Die verlängerte Epizykloide, bei der der Abstand von P zu M ebenfalls mit R bezeichnet wird, hat die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\rho + r) \sin(t) - R \sin\left(\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)t\right) \\ (\rho + r) \cos(t) - R \cos\left(\left(1 + \frac{\rho}{r}\right)t\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

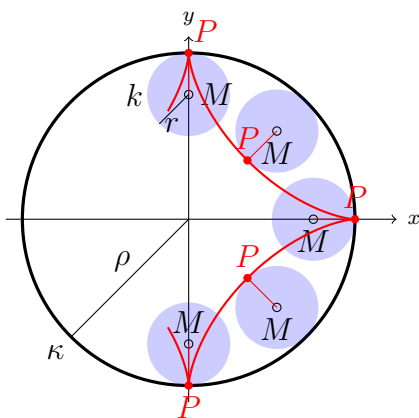
mit $R > r$.

Hierbei wurde jeweils bei der Bewegung von P relativ zu M der Radius r durch den Abstand R von P zu M ersetzt.

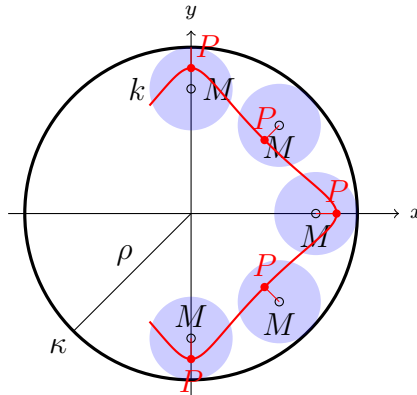
Hypozykloiden:

Es rollt der Kreis k mit Radius r *innen* auf einem Kreis κ mit Radius ρ . Der Punkt P kann sich auf dem Kreisumfang von k (*gewöhnliche Hypozykloide*), innerhalb von k (*verkürzte Hypozykloide*) oder außerhalb von k befinden (*verlängerte Hypozykloide*).

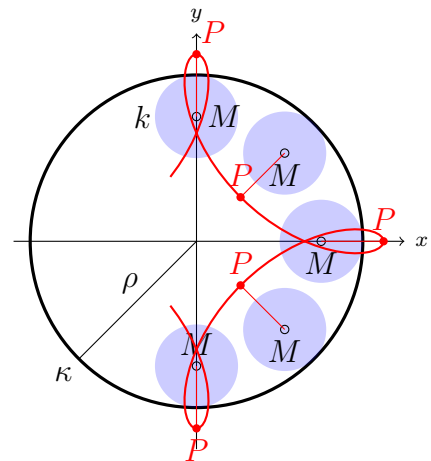
(gewöhnliche) Hypozykloide



verkürzte Hypozykloide

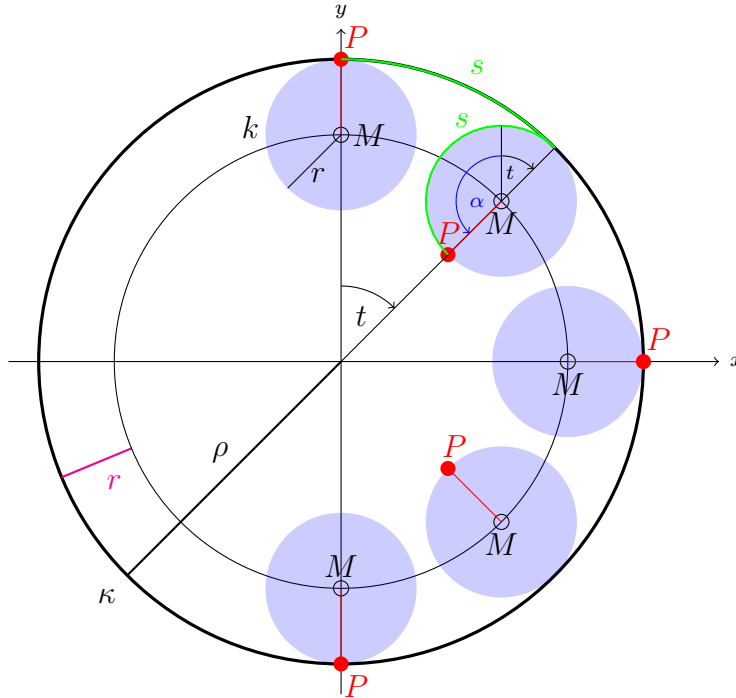


verlängerte Hypozykloide



Herleitung der Parametrisierung der gewöhnlichen Hypozykloiden:

- Bewegung von M : M bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $\rho - r$ mit dem Uhrzeigersinn beginnend bei der oberen Position. Der Winkel t sei der Winkel zwischen der y -Achse und dem Radialstrahl zum momentanen Berührungspunkt der beiden Kreise.



Daher lautet die Parametrisierung der Bewegung von M $\vec{x}_M(t) = \begin{pmatrix} (\rho - r) \sin(t) \\ (\rho - r) \cos(t) \end{pmatrix}$.

- Bewegung von P relativ zu M :

Der Winkel von P an M von der Vertikalen bis zum Radialstrahl von P sei α , s. obiges Bild. Die Drehung von P relativ zu M geschieht gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel α .

Die Bogenlänge s auf dem Kreis κ ist (wie bei der gewöhnlichen Zykloide) einerseits gegeben durch $s = \frac{\pi \rho}{180} t$. Dies ist auch die Kreisbogenlänge auf dem Kreis k , zu der der Winkel $t + \alpha$ gehört, da k auf κ rollt, ohne zu gleiten. Zu beachten ist dabei, dass α und t für die Angabe von s gleiches Vorzeichen haben, obwohl α im Laufe der Bewegung gegen den Uhrzeigersinn anwächst und t im Uhrzeigersinn. Daher ist andererseits $s = \frac{\pi r}{180} (\alpha + t)$. Nach Gleichsetzen der Formeln für s lässt sich α in Abhängigkeit von t ausdrücken:

$$\frac{\pi \rho}{180} t = \frac{\pi r}{180} (\alpha + t) \iff \rho t = r \alpha + r t \iff \alpha = \frac{\rho - r}{r} t = \left(\frac{\rho}{r} - 1\right) t.$$

Somit ist die Bewegung von P relativ zu M $\vec{x}_{MP}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(\alpha) \\ r \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right) t\right) \\ r \cos\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right) t\right) \end{pmatrix}$.

Die trigonometrischen Funktionen ergeben sich aus ähnlichen Betrachtungen wie bei der gewöhnlichen Zykloide, indem man berücksichtigt, dass P sich von der oberen Position ($t = 0$) entgegen des Uhrzeigersinns bewegt.

- Die gesamte Bewegung von P lässt sich nun angeben durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_M(t) + \vec{x}_{MP}(t) = \begin{pmatrix} (\rho - r) \sin(t) - r \sin\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right) t\right) \\ (\rho - r) \cos(t) + r \cos\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right) t\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Parametrisierung der (gewöhnlichen) Hypozykloide.

Die verkürzte Hypozykloide, bei der der Abstand von P zu M R ist, hat die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\rho - r) \sin(t) - R \sin\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)t\right) \\ (\rho - r) \cos(t) + R \cos\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)t\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

mit $R < r$.

Die verlängerte Hypozykloide, bei der der Abstand von P zu M ebenfalls mit R bezeichnet wird, hat die Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\rho - r) \sin(t) - R \sin\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)t\right) \\ (\rho - r) \cos(t) + R \cos\left(\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)t\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

mit $R > r$.

Hierbei wurde jeweils bei der Bewegung von P relativ zu M der Radius r durch den Abstand R von P zu M ersetzt.

4. Behandlung des Themas im Unterricht

1. Zeichnen von Kurven mit Hilfe von Kunststoffzahnradern:

Es sind verschiedentlich Spielzeuge im Handel, mit deren Hilfe Zykloiden gezeichnet werden können. Das Spielzeug besteht aus mehreren gezähnten Kunststoffschienen, -kreisringen und sowie Zahnradern verschiedener Größen mit Löchern im Innern, in die man Stifte stecken kann, um eine Zykloide zu zeichnen.

Das Zeichnen von Kurven mit solchen Zahnradern kann eine Einführung in das Thema „Zykloiden“ bieten.

Jede/r Schüler/in soll mit Hilfe der Zahnradern möglichst viele Kurven verschiedenster Gestalten zeichnen.

- *Vorgabe für eine/n Schüler/in:* Gerade gezähnte Schiene und Zahnrad
Dies führt zu verkürzten Zykloiden.
- *Vorgabe für eine/n andere/n Schüler/in:* Zwei Zahnradern, eines wird als fest gewählt, das andere wird darum herum bewegt.
Dies führt zu verkürzten Epizykloiden.
- *Vorgabe für eine/n andere/n Schüler/in:* Gezählter Kreisring und Zahnrad, das innerhalb des festen Kreisrings läuft.
Dies führt zu verkürzten Hypozykloiden.

Beantwortet werden sollen die folgenden Fragen:

Wie wirkt sich die Größe des bewegten Zahnradern auf die Gestalt der Kurve aus?

Wie wirkt sich die Position des Stifts auf die Gestalt der Kurve aus (wenn der Stift in der Nähe des Mittelpunkts des bewegten Zahnradern oder weiter weg vom Mittelpunkt des Zahnradern positioniert wird) ?

Falls keine realen Zahnradern zur Verfügung stehen, können auch virtuell am Computer Zykloiden gezeichnet werden. Dazu eignet sich insbesondere die auf einer Webseite benutzbare

Software Inspirograph [5]. Es können damit verkürzte Zykloiden, Epi- und Hypozykloiden hergestellt werden. Dazu können jeweils die Anzahl der Zähne der Zahnräder und die Stiftfarbe gewählt werden, sowie die gezeichnete Kurve als jpg downgeloadet werden.
(Das Verhältnis der Zähneanzahlen ist rational, so dass immer geschlossene Kurven entstehen.)

2. Aufnahme der Daten bei Epi-/Hypozykloiden:

Die Schüler/innen können beim Ausprobieren verschiedener Kreisradien eine Tabelle führen über die Radien des bewegten und des festen Kreises und ihr Verhältnis sowie die zugehörigen Umdrehungs- und Umrundungszahlen. Die Schüler/innen können hier untersuchen, wie sich die Wahl der Radien bzw. das Verhältnis der Radien auf die Gestalt der Kurve auswirkt im Bezug auf Eigen-Umdrehungen des bewegten Kreises und Umrundungen des festen Kreises, bis die Kurve eine geschlossene ist.

Oder in Inspirograph [5]: Die Schüler/innen können statt der Kreisradien die (nicht zu große) Anzahl der Zähne pro Zahnrad, die Anzahl der Eigen-Umdrehungen des bewegten Zahnrad und die Anzahl der Umrundungen des festen Zahnrad betrachten. Die Ergebnisse können dann im Plenum verglichen und diskutiert werden. Wie ist die Anzahl der Eigen-Umdrehungen/ Umrundungen von der Anzahl der Zähne abhängig?

3. Theoretische Behandlung des Stoffs:

Es werden ebene Kurven und deren Parametrisierung behandelt, sowie Kreise und Zykloiden, wie in den obigen Abschnitten 1 bis 3 angegeben.

4. Abschließend Verallgemeinerung mit mehreren Kreisen:

Die Schüler/innen können spielerisch online mit mehr als zwei Kreisen experimentieren und „wilde“ Kurven erzeugen. Dazu eignet sich die ebenfalls im Browser-Fenster aufrufbare Software [6]. Es lassen sich Kreise hinzunehmen, entweder innen (Position h) oder außen (Position e) und auch wieder löschen. Da lediglich Kreise wählbar sind, die aufeinander abrollen, entstehen somit Verallgemeinerungen von Epi- und Hypozykloiden.

Unterstützende Software:

Neben den bereits erwähnten Online-Tools [5] und [6] kann man auch in den Geometrie-Software-Paketen Cinderella [8], EUKLID Dynageo [10] und GeoGebra [11] Zykloiden selber konstruieren und deren Verlauf studieren oder online schon mit Hilfe der Software-Pakete vorgefertigte Animationen ablaufen lassen. Zum Beispiel:

Cinderella:

Eine Animation für Zykloiden mit Cinderella programmiert findet sich in [9]. Es lassen sich über Schieberegler die Zeit t und der Abstand des Punktes vom Kreismittelpunkt verändern.

GeoGebra:

Auf der Webseite [12] gibt es eine Animation der Zykloiden. Man kann mit Schieberegler den Radius des abrollenden Kreises, den Abstand vom Punkt zum Kreismittelpunkt sowie den Winkel t variieren.

5. Quellen, Links und Literatur

- [1] Deissler, Rainer: Aufgabenblätter zu Spiralkurven, <https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/spiralen-06-07.htm>, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken, Pädagogische Hochschule Freiburg, Zugriff am 14.02.2021
- [2] Meier, Sonja: Spirale ist nicht gleich Spirale!, *Junge Wissenschaft* 93, 2013, S. 34-41, https://www.junge-wissenschaft.ptb.de/fileadmin/paper/bis_2017/pdf/juwi-96-2013-03.pdf, Zugriff am 14.02.2021
- [3] Florian Wakolbinger: Kurven in Mathematikunterricht, Diplomarbeit, Universität Linz, 2013 http://idmthemen.pbworks.com/w/file/attach/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf, Zugriff am 14.02.2021
- [4] Zykloiden in wikipedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide>, Zugriff am 14.02.2021
- [5] Friend, Nathan: Inspirograph, <https://nathanfriend.io/inspirograph>, Zugriff am 14.02.2021
- [6] <https://seedcode.com/SpirographN/sgn.html>, Seedcode Software Unternehmen, Seattle, USA, Download über GitHub möglich: <https://github.com/seedcode/SpirographN>, Zugriffe am 14.02.2021, Epi- und Hypozykloiden mit mehreren Kreisen
- [7] Volker Jäkel, <https://www.v-jaekel.de/animate-trochoide.html>, Zugriff am 14.02.2021
Online-Software zum Zeichnen von Epi- und Hypozykloiden unter Einbeziehung von Selbstschnitten, Selbstberührungen, annähernde Geradföhrungen sowie Wendepunkten und Spitzen.
- [8] *Cinderella*: <https://cinderella.de/tiki-index.php>, Zugriff am 14.02.2021
- [9] Aaron Montag, <https://www-m10.ma.tum.de/bin/view/MatheVital/DiffGeo/Zykloide.html>, *MatheVital*, TU München, Zugriff am 14.02.2021
- [10] *EUKLID DynaGeo*: <http://www.dynageo.de/>, Zugriff am 14.02.2021
- [11] *GeoGebra*: <https://www.geogebra.org>, Zugriff am 14.02.2021
- [12] Holzapfel, Michael: <https://www.geogebra.org/m/Vjp9xEKc>, Zugriff am 14.02.2021

Haftungsausschluss:

Der Autor übernimmt keine Haftung für Schäden, die durch den Aufruf der genannten Webseiten und die Installation der genannten Software entstehen. Der Download von Dateien und Computerprogrammen von den genannten Websites erfolgt auf eigene Gefahr. Eine Haftung für Schäden oder Beeinträchtigungen durch Computerviren wird ausgeschlossen.

6. Aufgaben zu ebenen Kurven und Zykloiden

1. Herstellen von Parametrisierungen ebener Kurven:

Gib jeweils eine Parametrisierung des Schaubilds der folgenden Funktion als ebene Kurve an und zeichne die Kurve.

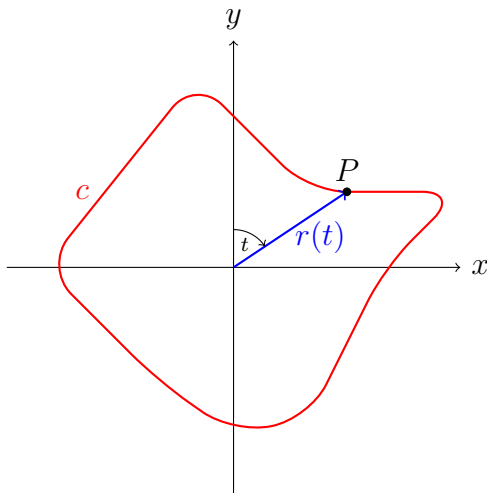
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ c) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

Gib für die Funktionsschaubilder jeweils andere Parametrisierungen an als die obigen gefundenen.

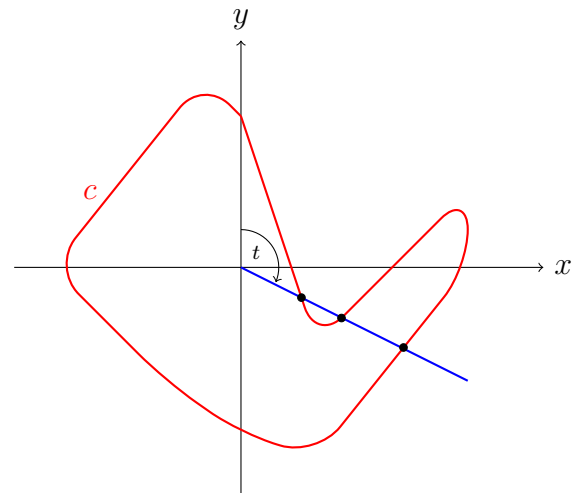
2. Eine Polarkoordinatendarstellung ebener Kurven:

Nun wird die Parametrisierung eines Kreises mit Radius r , z.B. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}$ verallgemeinert. Der Kreis wird durch die Drehung einer Radiusstrecke der konstanten Länge r um den Ursprung erzeugt. Der Drehwinkel ist wieder mit t bezeichnet.

Nun soll eine ebene Kurve c parametrisiert werden, indem die Radienlänge vom Drehwinkel t abhängt: Es entsteht die Zuordnung $t \mapsto r(t)$. Damit r eine Funktion ist, darf ein Radialstrahl (Halbgerade) vom Ursprung aus c höchstens einmal schneiden.



r ist eine Funktion.



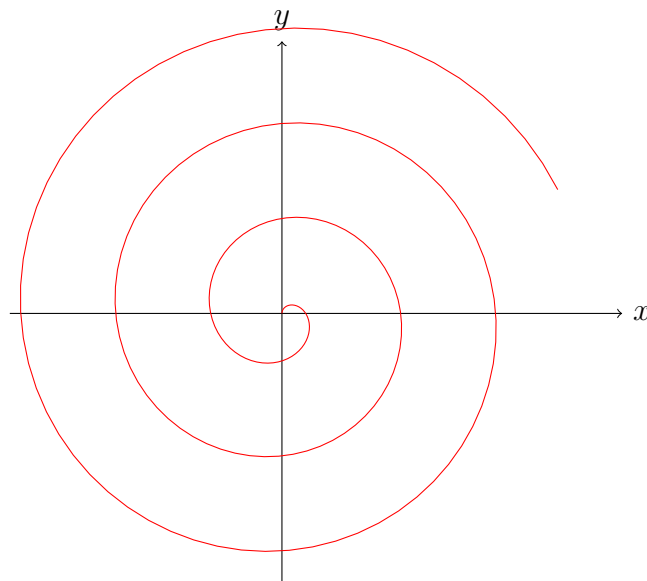
r ist hier keine Funktion.

Welche Parametrisierung entsteht für die Kurve c ?

3. Parametrisierungen von Spiralkurven:

a) Arithmetische Spirale:

Gegeben ist das folgende Bild einer Spiralkurve. Finde die Funktion r mit $r(0) = 0$ aus Aufgabe 2 für diese Kurve heraus, indem Du zu gegebenem Winkel t den Radius $r(t) > 0$ misst und Deine Messwerte von $r(t)$ in ein Achsenkreuz mit horizontaler t -Achse einträgst.



b) Logarithmische Spirale:

Gegeben ist die Funktion r wie in Aufgabe 2 mit $r(t) = e^t$ für $t \in \mathbb{R}$. Wie lautet die Parametrisierung der ebenen Kurve? Zeichne diese Kurve. Wie unterscheidet sie sich von der arithmetischen Spirale aus a) ?

4. **Gewöhnliche Zykloide**, aus [3]

Zeichne eine Zykloide, indem das Intervall $[0, 2\pi r]$ auf der horizontalen Achse in z.B. 18 gleiche Teile geteilt wird. Da das Intervall $[0, 2\pi r]$ einer Umrundung des Rads mit Radius r entspricht, lauten die entsprechenden Winkel $0^\circ, \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ, 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ, 60^\circ$, usw.

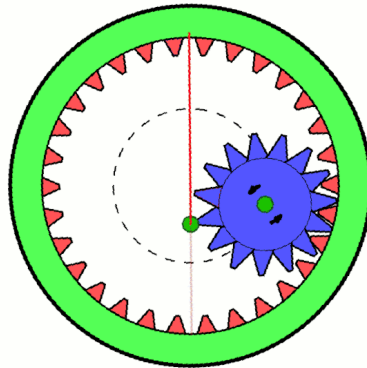
Überlege, an welcher Stelle der horizontalen Achse welche Winkel jeweils eingezeichnet werden müssen.

5. **Strecke:**

Gegeben ist eine (gewöhnliche) Hypozykloide mit dem Radienverhältnis $\frac{\rho}{r} = 2$.

Überprüfe, dass der Punkt P eine Strecke der Länge 2ρ durchfährt. Wie lautet die Parametrisierung der Strecke?

Mit solchen zwei Kreisen lässt sich eine Kreisbewegung in eine geradlinige Bewegung überführen. Man nennt die beiden Kreise auch *Cardanische Kreise* nach G. Cardano, 1501-1576.



(Quelle: MichaelFrey (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gear_mechanism_creating_a_straight_line.gif), „Gear mechanism creating a straight line“, Farbänderung, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>)

6. **Ellipse:**

Gegeben ist eine verkürzte Hypozykloide mit dem Radienverhältnis $\frac{\rho}{r} = 2$.

Wie lautet die Parametrisierung dieser Kurve?

Wie sieht die Kurve aus?

7. **Astroide:**

Gegeben ist eine (gewöhnliche) Hypozykloide mit dem Radienverhältnis $\frac{\rho}{r} = 4$.

(Der Umfang des kleineren bewegten Kreises ist nur ein Viertel so lang wie der Umfang des festen Kreises.)

Wie lautet die Parametrisierung dieser Kurve? Wie sieht die Kurve aus?

8. **Kardioide und Nephroide:**

Gegeben ist eine (gewöhnliche) Epizykloide mit dem Radienverhältnis

a) $\frac{\rho}{r} = 1$

(Die Umfänge der Kreise sind gleich.)

b) $\frac{\rho}{r} = 2$.

(Der Umfang des außen beweglichen Kreises ist halb so groß wie der des festen Kreises.)

Wie lautet die Parametrisierung dieser Kurve? Wie sieht die Kurve aus?

9. Geschlossenheit:

Ist eine Epi- oder Hypozykloide immer eine geschlossene Kurve?

7. Lösungen zu den Aufgaben aus Abschnitt 6

1. a) $f(x) = x^2$, Parametrisierung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Da mit t auch t^3 über alle reellen Zahlen läuft, ist eine andere Parametrisierung z.B.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = (x - 2)^2 + 3$, Parametrisierung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t - 2)^2 + 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Wie bei a) kann man eine weitere Parametrisierung mit t^3 statt t angeben:

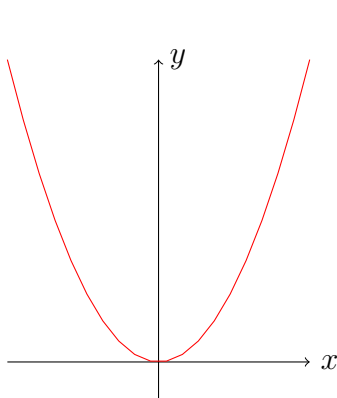
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ (t^3 - 2)^2 + 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, Parametrisierung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

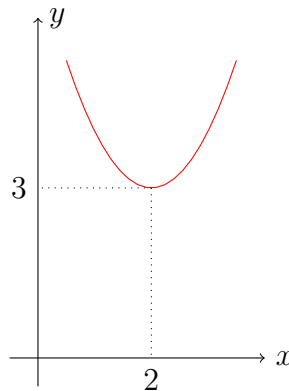
$t \geq 0$ kann z.B. durch $t^2 \geq 0$ für $t \in \mathbb{R}$ ersetzt werden, die neue Parametrisierung lautet

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ |t| \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

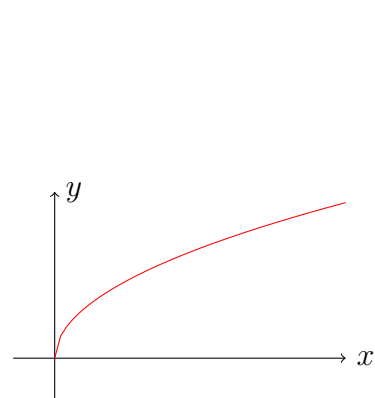
a)



b)



c)



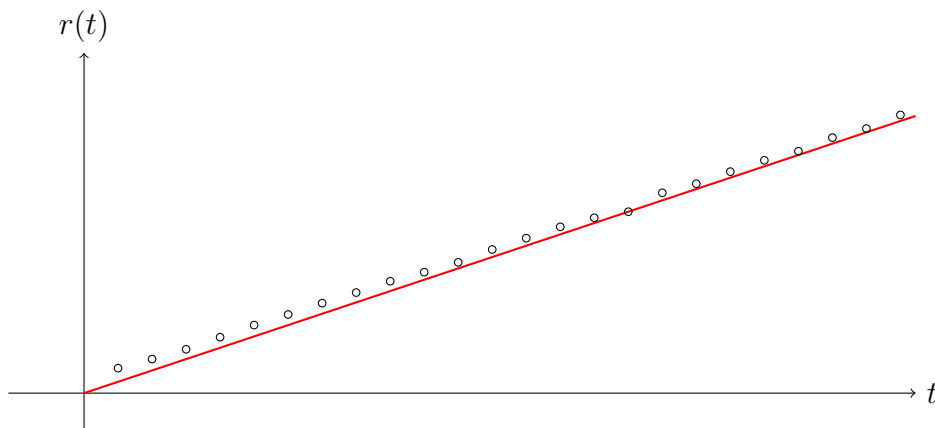
2. Die Parametrisierung lautet $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \sin(t) \\ r(t) \cos(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. a) Die Radialfunktion der arithmetischen Spirale ist von der Form $r(t) = at + b$ mit reellen Zahlen a, b . ($r(t)$ mit zwei Nachkommastellen angeben.)

Messen der vom Winkel t abhängigen Radialstrecken $r(t)$ z.B. in 45° -Schritten im Bild in der Aufgabe ergibt inkl. Messfehler eine Wertetabelle, die wie folgt aussehen könnte.

t in Grad	45	90	135	180	225	270	305	360	405	450	495
$r(t)$ in cm	0,33	0,45	0,58	0,74	0,9	1,04	1,19	1,33	1,48	1,6	1,73
t in Grad	540	585	630	675	720	765	810	855	900	945	990
$r(t)$ in cm	1,9	2,05	2,2	2,32	2,4	2,63	2,77	2,93	3,08	3,2	3,38
t in Grad	1035	1080	1035	1080							
$r(t)$ in cm	3,5	3,68	3,5	3,68							

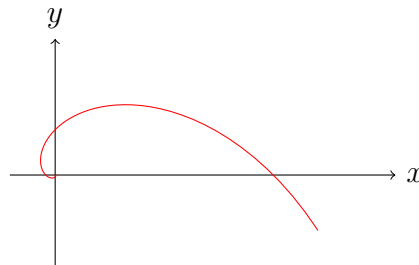
In ein Achsenkreuz eingezeichnet, erhält man eine Punktekte:



Aus den Punkten ist ein linearer Zusammenhang sichtbar. Die Ursprungsgerade, die diesen Zusammenhang darstellt, könnte $y = \frac{1}{3}x$ sein (rote Gerade im Bild). Deshalb könnte $r(t) = \frac{1}{3}t$ gesetzt werden. Die Polarkoordinatendarstellung der arithmetischen Spirale ist mit diesem $r(t)$

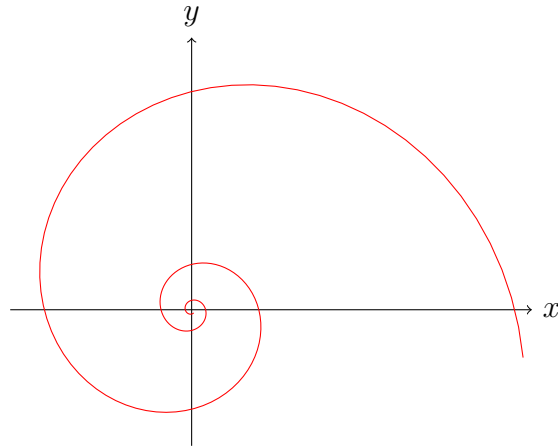
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t \sin(t) \\ \frac{1}{3}t \cos(t) \end{pmatrix} \text{ für } t > 0.$$

- b) Die logarithmische Spirale ist gegeben durch die Parametrisierung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.



Unterschied logarithmische Spirale/arithmetische Spirale:

Die logarithmische Spirale hat die Form eines Schneckenhauses, die arithmetische Spirale hat z.B. die Form eines aufgerollten Teppichs. Ein Teppich ist überall gleich dick und deshalb sind aufeinanderfolgende Kurventeile einer arithmetischen Spirale zu gleichem Winkel bzgl. des Radialstrahls immer konstant weit entfernt. Bei der logarithmischen Spirale erhöht sich die Radialstrahlänge exponentiell, je weiter man vom Ursprung weg geht. Nachfolgend ist eine andere logarithmische Spirale mit $r(t) = e^{\frac{t}{4}}$ gezeichnet, um den Schneckenhausverlauf deutlich zu machen.

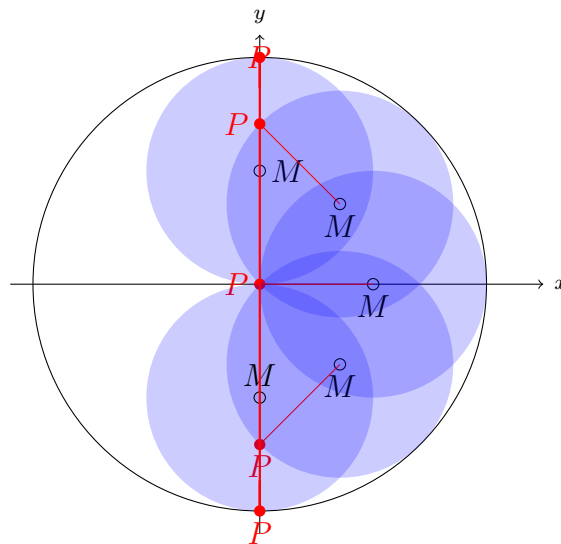


Weitere Informationen und Materialien zu Spiralen finden sich bei [1] und [2].

4. Eine ausführliche Darstellung der Lösung der Aufgabe befindet sich in [3], S. 12-13.
5. Es ist $\rho = 2r$. Eingesetzt in die Parametrisierung der gewöhnlichen Hypozykloide liefert dies die Parametrisierung:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} (2r - r) \sin(t) - r \sin\left(\left(\frac{2r}{r} - 1\right)t\right) \\ (2r - r) \cos(t) + r \cos\left(\left(\frac{2r}{r} - 1\right)t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\sin(t) - \sin(t)) \\ r(\cos(t) + \cos(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Da die x -Koordinate konstant Null ist, liegt als Kurve c ein Teil der y -Achse vor. Da die Werte der Cosinus-Funktion zwischen -1 und 1 einschließlich liegen, liegt die y -Koordinate von c zwischen $-\rho$ und ρ einschließlich. Somit ist die Kurve c eine Strecke der Länge 2ρ . Die Parametrisierung lautet wie oben hergeleitet: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.



6. Es ist $\rho = 2r$. Eingesetzt in die Parametrisierung der verkürzten Hypozykloide mit $R < r$

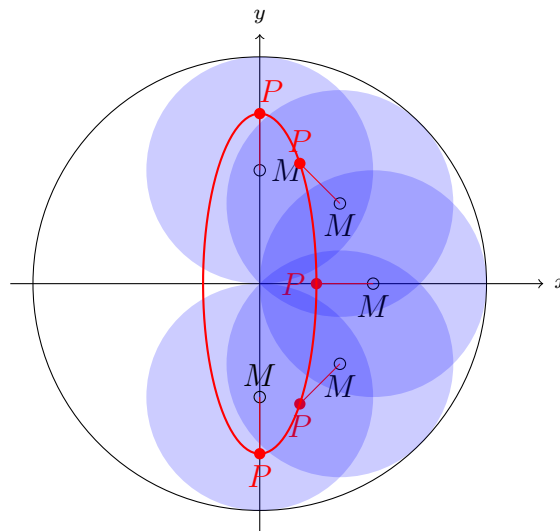
liefert dies die Parametrisierung:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} (2r - r) \sin(t) - R \sin\left(\left(\frac{2r}{r} - 1\right)t\right) \\ (2r - r) \cos(t) + R \cos\left(\left(\frac{2r}{r} - 1\right)t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(t) - R \sin(t) \\ r \cos(t) + R \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (r - R) \sin(t) \\ (r + R) \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

wobei R der Abstand von P zum Radmittelpunkt ist.

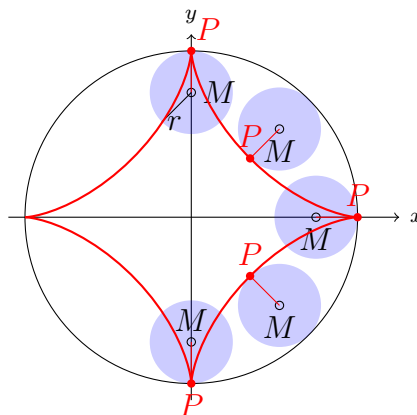
Das ist die Parametrisierung einer Ellipse mit der größten Ausdehnung in x -Richtung von $-(r - R)$ bis $r - R$ (kleine Halbachsenlänge) und in y -Richtung von $-(r + R)$ bis $r + R$ (große Halbachsenlänge der Ellipse).

Die allgemeine Parametrisierung der Ellipse lautet $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}$ mit reellen positiven Zahlen a, b und $a \neq b$. a und b sind die Halbachsenlängen.



7. Bei der Asteroide kann sich wegen des Radienverhältnisses $\frac{r}{r} = 4$ das Rad in dem festen Kreis für eine Umrundung viermal drehen. Die Parametrisierung dieser Kurve lautet

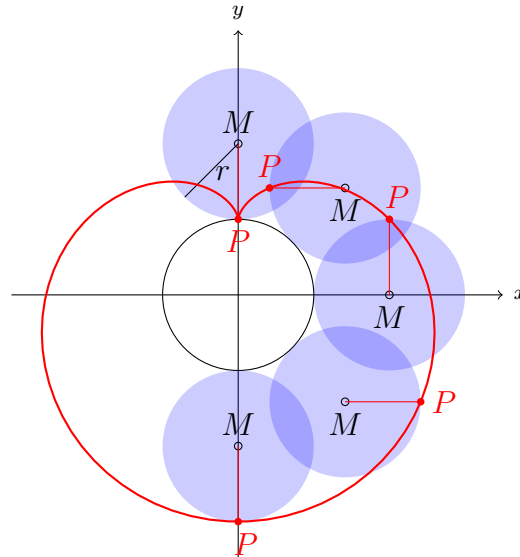
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (4r - r) \sin(t) - r \sin\left(\left(\frac{4r}{r} - 1\right)t\right) \\ (4r - r) \cos(t) + r \cos\left(\left(\frac{4r}{r} - 1\right)t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r \sin(t) - r \sin(3t) \\ 3r \cos(t) + r \cos(3t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$



8. a) **Kardioide**

Bei der Kardioide kann sich wegen des Radienverhältnisses $\frac{\rho}{r} = 1$ das Rad außerhalb des festen Kreises für eine Umrundung genau auch einmal drehen. Es entsteht eine Spitze. Die Parametrisierung dieser Kurve lautet

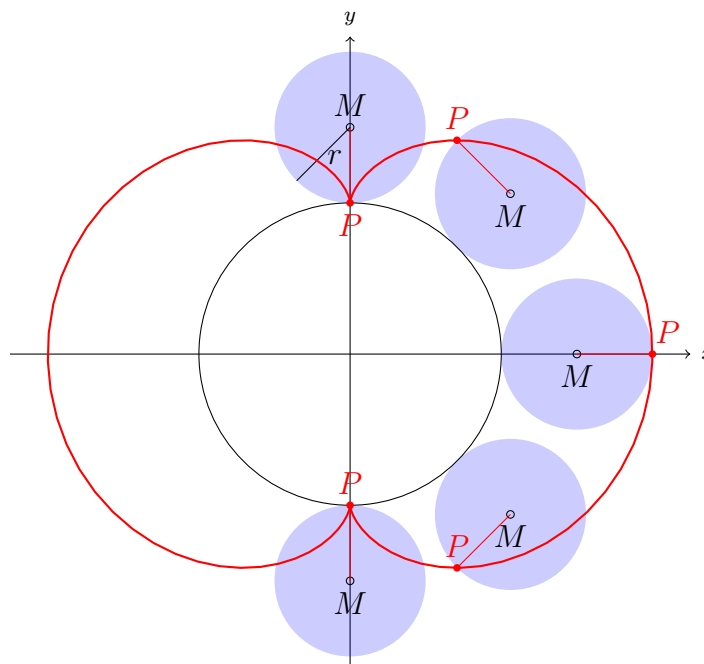
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (r+r)\sin(t) - r\sin((1+1)t) \\ (r+r)\cos(t) - r\cos((1+1)t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\sin(t) - r\sin(2t) \\ 2r\cos(t) + r\cos(2t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$



b) **Nephoide**

Bei der Nephroide kann sich wegen des Radienverhältnisses $\frac{\rho}{r} = 2$ das Rad außerhalb des festen Kreises für eine Umrundung genau zweimal drehen. Es entstehen zwei Spitzen. Die Parametrisierung dieser Kurve lautet

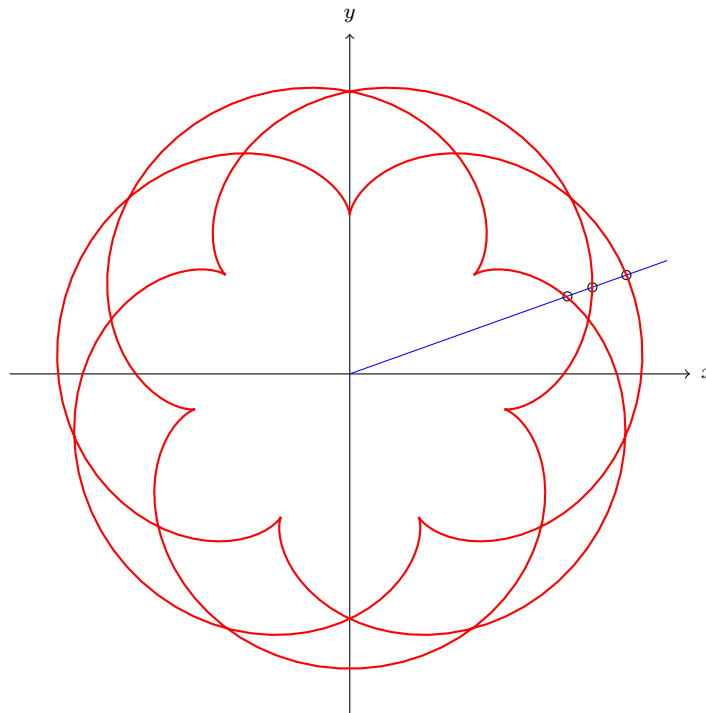
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (2r+r)\sin(t) - r\sin((1+2)t) \\ (2r+r)\cos(t) - r\cos((1+2)t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r\sin(t) - r\sin(3t) \\ 3r\cos(t) + r\cos(3t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$



9. Die Epi-/Hypozykloide ist genau dann geschlossen, wenn das Radienverhältnis ein Bruch ist, d.h. $\frac{\rho}{r} \in \mathbb{Q}$. Wenn z.B. $\frac{\rho}{r} = \frac{7}{3}$ ist, dann würde das bewegliche Rad sich siebenmal um sich selbst drehen und dabei drei Umrundungen des fixen Kreises absolvieren, damit die Kurve geschlossen ist. Vorher muss der Bruch gekürzt werden, damit die kleinst möglichen Umrundungsanzahlen festgestellt werden können.

Ist das Verhältnis $\frac{\rho}{r}$ irrational, z.B. $\frac{\rho}{r} = \sqrt{2}$, so schließt sich die Epi-/Hypozykloide nicht.

Gewöhnliche Epizykloide mit Radienverhältnis $\frac{\rho}{r} = \frac{7}{3}$:



Die Drehungen des kleineren Kreises um sich selbst kann man an der Anzahl der Spitzen ablesen: 7 Spitzen. Die Anzahl der Umrundungen des großen Kreises kann man an der maximalen Anzahl der Schnittpunkte eines Radialstrahls (blau) mit der Epizykloide ablesen: 3 Stück.