Interpolation

Wir wollen uns für diese Ausarbeitung auf Polynome dritten Grades

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

beschränken. Dabei ist x die Variable und a, b, c und d sind reelle Zahlen.

Aufgabenstellung

Wir haben schon oft Polynome ausgewertet. So erzeugt

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

die Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = p(x)$	-12	0	2	0	0	8

Wenn wir wissen, dass die Wertetabelle von einem Polynom stammt, können wir dann das Polynom rekonstruieren?

Bekanntlich bestimmen zwei Punkte in der Ebene eine Gerade, drei Punkte eine Parabel usw. In unserem Beispiel haben wir sechs Punkte. Wie erkennen wir möglichst einfach das Polynom, das dahinter steckt?

Die Grundlagen

Wenn wir $p(3)$ berechnen, können wir direkt die Formel auswerten:

$x=3$		Zwischenergebnis		Auswertung
		$z=0$		$p=0$
x^3	$\rightarrow$	$z=27$	$\rightarrow$	$p=p+z=27$
$-2x^2$	$\rightarrow$	$z=-18$	$\rightarrow$	$p=p+z=9$
$-x$	$\rightarrow$	$z=-3$	$\rightarrow$	$p=p+z=6$
2	$\rightarrow$	$z=2$	$\rightarrow$	$p=p+z=8$

Es ist ungeschickt, zuerst x^3 zu berechnen und danach x^2 . Besser berechnen wir zuerst x^2 und anschließend $x^3 := x^2 \cdot x$. Dazu formen wir das Polynom um, wir klammern x aus

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x\left(x^2 - 2x - 1\right) + 2 \\ &= x\left(x\left(x-2\right) - 1\right) + 2 \end{aligned}$$

Die Auswertung wird schneller

$x=3$		Zwischenergebnis		Auswertung
$x-2$	$\rightarrow$	$z=1$		
$x \cdot z - 1$	$\rightarrow$	$z=2$		
$x \cdot z + 2$	$\rightarrow$	$z=8$	$\rightarrow$	$p=8$

In der Wertetabelle sind drei Werte besonders interessant $p(-1) = 0, p(1) = 0$ und $p(2) = 0$. Damit definieren wir ein weiteres Polynom

$$q(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist. Also hat $q(x)$ die Nullstellen

$$\begin{aligned} q(x) &= (x+1)(x-1)(x-2) \\ q(-1) &= \mathbf{(-1+1)}(-1-1)(-1-2) = 0 \\ q(1) &= (1+1)\mathbf{(1-1)}(1-2) = 0 \\ q(2) &= (2+1)(2-1)\mathbf{(2-2)} = 0 \end{aligned}$$

Ein Polynom dritten Grades hat höchstens drei Nullstellen. Die Nullstellen von $p(x)$ und von $q(x)$ kennen wir. Mit einer Konstanten c gilt dann

$$p(x) = c \cdot q(x)$$

Wenn wir nun noch an einer Stelle, z.B. $x = 3$ auswerten, können wir die Konstante bestimmen:

$$p(3) = 8 = c \cdot (3+1)(3-1)(3-2) = c \cdot 8$$

Also ist $c = 1$. Wir haben auch gesehen, dass die Darstellung

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$$

für die Auswertung optimal ist. Sie benötigt die geringste Anzahl an Berechnungen. Leider können wir sie nicht zur Grundlage unserer Betrachtungen machen, da wir für diese Darstellung die Nullstellen des Polynoms kennen müssen, die in der Regel nicht so einfach zu bestimmen sind.

Die kubischen Polynome haben auch noch die schöne Eigenschaft, dass wir mit ihnen rechnen können. So ist mit jeder Konstanten z das Polynom

$$z \cdot p(x) = (za)\, x^3 + (zb)\, x^2 + (zc)\, x + (zd)$$

wieder ein höchstens kubisches Polynom. Mit einem weiteren kubischen Polynom $q(x) = \widehat{a}x^3 + \widehat{b}x^2 + \widehat{c}x + \widehat{d}$ ist

$$p(x) + q(x) = q(x) = (a + \widehat{a})\, x^3 + \left(b + \widehat{b}\right) x^2 + (c + \widehat{c})\, x + \left(d + \widehat{d}\right)$$

wieder ein höchstens kubisches Polynom. **Aufgabe 1:**
Wann ist $p(x) + q(x)$ ein quadratisches und wann ein lineares Polynom?

Der direkte Algorithmus

Ein Polynom kann auf mehrere Weisen geschrieben werden. Wählen wir die Form

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1}$$

sind die **vier** Konstanten a, b, c und d zu berechnen und wir haben unser Polynom bestimmt.

Dazu benötigen wir mindestens vier verschiedene Wertepaare (x_i, y_i) . Diese setzen wir in die allgemeine Form (1) und bekommen vier Gleichungen für die vier Unbekannten

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = y_0 \\
p(x_1) &= ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = y_1 \\
p(x_2) &= ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = y_2 \\
p(x_3) &= ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d = y_3
\end{aligned}$$

Das ist zum Glück ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

aber trotzdem ein großer Aufwand, es zu lösen.

Der Algorithmus von Newton

Die Faulheit war schon immer ein guter Ratgeber in der Mathematik. Es muss doch möglich sein, ohne so viel zu rechnen, das Polynom $p(x)$ zu finden!

Deshalb fangen wir klein an und betrachten nur den ersten Datenpunkt (x_0, y_0) . Das Polynom ist schnell gefunden, $q_0(x) = c_0$ und da $q_0(x_0) = y_0$ sein soll ist $c_0 = y_0$ und

$$q_0(x) = y_0$$

Jetzt nehmen wir den zweiten Punkt (x_1, y_1) dazu. Wir wissen, es muss ein Polynom ersten Grades sein und wir wollen bisher Erreichtes nicht verschwenden. Deshalb machen wir den Ansatz

$$q_1(x) = q_0(x) + c_1 \cdot (x - x_0) = y_0 + c_1 \cdot (x - x_0)$$

denn

$$q_1(x_0) = y_0 + c_1 \cdot \boldsymbol{(x_0 - x_0)} = y_0$$

erfüllt bereits die erste Bedingung $q_1(x_0) = y_0$. Mit der zweiten Bedingung $q_1(x_1) = y_1$ bestimmen wir die Konstante c_1

$$\begin{aligned} q_1(x_1) &= y_0 + c_1 \cdot (x_1 - x_0) = y_1 \\ c_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

und erhalten das Interpolationspolynom

$$q_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Gehen wir nun in dieser Art zum dritten Wertepaar (x_2, y_2) ist der Ansatz

$$q_2(x) = q_1(x) + c_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1)$$

Wieder wird das erreichte nicht zerstört

$$\begin{aligned} q_2(x_0) &= q_1(x_0) + c_2 \cdot \boldsymbol{(x_0 - x_0)}(x - x_1) = \\ &= q_1(x_0) = y_0 \\ q_2(x_1) &= q_1(x_1) + c_2 \cdot (x - x_0)\boldsymbol{(x_1 - x_1)} = \\ &= q_1(x_1) = y_1 \end{aligned}$$

Durch die dritte Bedingung bestimmen wir c_2

$$\begin{aligned} q_2(x_2) &= q_1(x_2) + c_2 \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ c_2 &= \frac{y_2 - q_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Die Berechnungen werden immer aufwendiger. Da wir ja wenig arbeiten wollen, sollten wir nach Vereinfachungen suchen.

Es ist deutlich geworden, dass wir das Interpolationspolynom in der Form

$$
\begin{aligned}
q_3(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + c_3(x - x_2)))
\end{aligned}
$$

ansetzen wollen, um die Datenpunkte der Reihe nach abzuarbeiten.

Nun können wir einsetzen

$$
\begin{aligned}
q_3(x_0) &= y_0 = c_0 \\
q_3(x_1) &= y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\
q_3(x_2) &= y_2 = c_0 + (x_2 - x_0)(c_1 + c_2(x_2 - x_1)) \\
q_3(x_3) &= y_3 = c_0 + (x_3 - x_0)(c_1 + (x_3 - x_1)(c_2 + c_3(x_3 - x_2)))
\end{aligned}
$$

Wenden wir das auf unsere Wertetabelle an. Wenn wir wissen, dass es sich um ein kubisches Polynom handelt, können wir zwei Punkte weglassen

x	0	1	2	3
$y = p(x)$	2	0	0	8

Die Berechnung des Interpolationspolynoms ist

$$
\begin{aligned}
q_3(0) &= 2 = c_0 \\
q_3(1) &= 0 = 2 + c_1(1 - 0) = 2 + c_1 \\
c_1 &= -2 \\
q_3(2) &= 0 = 2 + (2 - 0)(-2 + c_2(2 - 1)) = 2 + 2(-2 + c_2) \\
c_2 &= 1 \\
q_3(x_3) &= 8 = 2 + (3 - 0)(-2 + (3 - 1)(1 + c_3(3 - 2))) \\
c_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Mit dem Ansatz lautet es

$$
\begin{aligned}
q_3(x) &= c_0 + (x - x_0)\,(c_1 + (x - x_1)\,(c_2 + c_3\,(x - x_2))) \\
&= 2 + (x - 0)\,(-2 + (x - 1)\,(1 + (x - 2))) \\
&= 2 - 2x + \left(x^2 - x\right)(1 + (x - 2)) \\
&= x^3 - 2x^2 - x + 2
\end{aligned}
$$

Das ist unser Polynom $p(x)$.

Aufgabe 2:

Nehmen Sie aus der Wertetabelle

x	-2	-1	1	2
$y = p(x)$	-12	0	0	0

und bestimmen Sie das Interpolationspolynom.

Lösung 2:

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
q_3(-2) = -12 &= c_0 \\
q_3(-1) = 0 &= -12 + c_1\,(-1 - (-2)) \\
c_1 &= 12 \\
q_3(1) = 0 &= -12 + (1 + 2)\,(12 + c_2\,(1 - (-1))) \\
-4 &= c_2 \\
q_3(2) = 0 &= c_0 + (x_3 - x_0)\,(c_1 + (x_3 - x_1)\,(c_2 + c_3\,(x_3 - x_2))) \\
0 &= -12 + (2 - (-2))\,(12 + (2 - (-1))\,(-4 + c_3\,(2 - 1))) \\
1 &= c_3
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
q_3(x) &= -12 + 12\,(x + 2) - 4\,(x + 2)\,(x + 1) + (x + 2)\,(x + 1)\,(x - 1) \\
&= 12x + 12 + (x + 1)\,(x + 2)\,(x - 5) \\
&= 12x + 12 + x^3 - 3x^2 - 10x + x^2 - 3x - 10 \\
&= x^3 - 2x^2 - x + 2 = p(x)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie für die Wertetabelle

x	0	1	2	3
$y = p(x)$	0	2	4	6

ein kubisches Interpolationspolynom. Was erwarten Sie?

Lösung 3:
Es ist offensichtlich $f(x) = 2x$. Also sollte in dem Ansatz

$$\begin{aligned} q_3(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= c_0 + c_1(x - 0) + c_2(x - 0)(x - 1) + c_3(x - 0)(x - 1)(x - 2) \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x(x - 1) + c_3 x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$c_0 = c_2 = c_3 = 0$ und $c_1 = 2$ sein. Die Berechnung des Interpolationspolynoms ergibt

$$\begin{aligned} q_3(0) &= 0 = c_0 \\ q_3(1) &= 2 = 0 + c_1(1 - 0) \\ c_1 &= 2 \\ q_3(2) &= 4 = 0 + (2 - 0)(2 + c_2(2 - 1)) \\ c_2 &= 0 \\ q_3(3) &= 6 = 0 + (3 - 0)(2 + (3 - 1)(0 + c_3(3 - 2))) \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Der Algorithmus von Lagrange

Dem Mathematiker Lagrange war auch das noch zu viel Aufwand. Wir wissen, dass ein kubisches Polynom durch vier Bedingungen, so viele Wertepaare haben wir, eindeutig festgelegt ist. Das Polynom sollte möglichst einfach zu konstruieren sein. Er nahm drei verschiedene Punkte und verlangte, dass das Polynom dort null sein soll. Das ist einfach, z.B.

$$L_0(x) = c \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

An der übrigen Stelle soll es eins sein, d.h. $L_0(x_0) = 1$. Damit ist das erste Polynom

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Das können wir noch dreimal machen

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ L_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Nun setzen wir das Interpolationspolynom in der Form

$$q_3(x) = c_0 \cdot L_0(x) + c_1 \cdot L_1(x) + c_2 \cdot L_2(x) + c_3 \cdot L_3(x)$$

an. Die Interpolationsbedingung $q_3(x_i) = y_i$ führt nun auf die sehr einfachen Gleichungen

$$\begin{aligned} q_3(x_0) = y_0 &= c_0 \cdot L_0(x_0) + c_1 \cdot L_1(x_0) + c_2 \cdot L_2(x_0) + c_3 \cdot L_3(x_0) \\ y_0 &= c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = c_0 \\ q_3(x_1) = y_1 &= c_0 \cdot L_0(x_1) + c_1 \cdot L_1(x_1) + c_2 \cdot L_2(x_1) + c_3 \cdot L_3(x_1) \\ y_1 &= c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = c_1 \\ q_3(x_2) = y_2 &= c_0 \cdot L_0(x_2) + c_1 \cdot L_1(x_2) + c_2 \cdot L_2(x_2) + c_3 \cdot L_3(x_2) \\ y_2 &= c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0 = c_2 \\ q_3(x_3) = y_3 &= c_0 \cdot L_0(x_3) + c_1 \cdot L_1(x_3) + c_2 \cdot L_2(x_3) + c_3 \cdot L_3(x_3) \\ y_3 &= c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 = c_3. \end{aligned}$$

Wenden wir das auf die reduzierte Wertetabelle

x	0	1	2	3
$y = p(x)$	2	0	0	8

an. Die Polynome sind

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)\,,\\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3)\,,\\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)\,,\\
L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)\,.
\end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom ist

$$\begin{aligned}
q_3(x) &= y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)\\
&= 2 \cdot L_0(x) + 0 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) + 8 \cdot L_3(x)\\
&= -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)\\
&= (x-1)(x-2)\left(-\frac{1}{3}(x-3) + \frac{4}{3}x\right)\\
&= (x-1)(x-2)(x+1) = p(x)\,.
\end{aligned}$$

und damit wieder unser bekanntes Polynom $p(x)$. Wir hätten natürlich $L_1(x)$ und $L_2(x)$ gar nicht erst bestimmen müssen.

Aufgabe 4:

Führen Sie die Interpolation nach Lagrange mit den Werten

x	-1	1	2	3
$y = p(x)$	0	0	0	8

aus.

Gibt es für diesen Sonderfall eine noch einfachere Methode, das Interpolationspolynom zu bestimmen?

Lösung 4:

Da $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ benötigen wir nur

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom ist

$$\begin{aligned} q_3(x) &= 0 \cdot L_0(x) + 0 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) \\ &= 8 \cdot L_3(x) \\ &= (x-1)(x-2)(x+1) = p(x) \end{aligned}$$

Wir wissen, dass ein kubische Polynom mit drei bekannten Nullstellen gesucht ist. Es muss die Darstellung

$$q_3(x) = c \cdot (x+1)(x-1)(x-2)$$

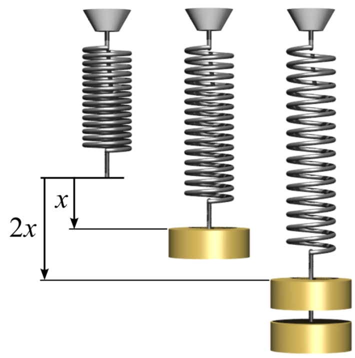
haben. Aus $q_3(3) = 8$ folgt $c = 1$. Dieser Zugang ist einfacher, da er auf die Aufstellung von $L_3(x)$ verzichtet.

Anwendungen

Bisher haben wir uns mit der Frage befasst, wie man eine Interpolierende aus gegebenen Daten berechnet. Nun wollen wir ausführen, dass die Aufgabenstellung durchaus einen Praxisbezug hat.

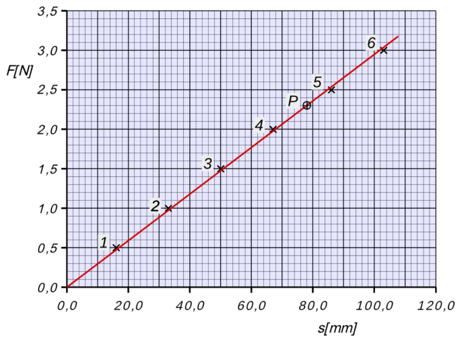
Das Gesetz von Hooke

Wir haben einen elastischen Gegenstand, z.B. eine Feder, und wollen beschreiben, wie er auf die Einwirkung einer Kraft reagiert. Dazu können wir eine Graphik oder eine Tabelle benutzen.



Wenn wir die Graphik betrachten, legt das einen linearen Zusammenhang zwischen der Kraft und der Ausdehnung nahe.

$$F(s) = a_0 + a_1 s$$



Gewicht in Kg	Dehnung in mm
1	2
2	4
5	10
6	12
7	12.5
8	14
10	200

Da die Gerade durch den Ursprung geht, ist $a_0 = 0$. Aus der Steigung erhalten wir a_1 , z.B.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.5}{50} = 0.03 \;\Rightarrow\; a_1 = 0.03$$

Unter dieser Annahme können wir die Feder durch eine Zahl a_1 , die Federkonstante beschreiben. Die Tabelle legt nahe, dass die Annahme nicht überall gilt. Für grosse Lasten wird die Feder überdehnt.

Wie wir auf dem Arbeitsblatt zu Grundlagen der Interpolation gesehen haben, wird eine lineare Funktion durch zwei Werte eindeutig festgelegt. Wenn die Werte von einer Messung stammen, ist es wahrscheinlich, dass sie auf Grund von Messfehlern nicht exakt auf einer Geraden liegen. In diesem Fall geht man von der Interpolation zur Approximation über.

Aufgabe 5: Wie könnten wir die Werte der Tabelle interpolieren?

Lösung 5: Den Bereich von 1 Kg bis 6 Kg können wir einfach durch eine Gerade beschreiben

$$s(m) = 2 \cdot m$$

Die drei Werte für 7, 8 und 10 Kg können wir durch eine Parabel interpolieren. Soll diese stetig in die Gerade übergehen, haben wir vier Bedingungen und müssen mit einem kubischen Interpolationspolynom arbeiten.

Das führt zur stückweisen polynomialen Interpolation, den Splines. Mit diesen beschäftigt sich die numerische Mathematik.

Vereinfachen von Funktionen

Sie haben vielleicht mit Ihrem Taschenrechner den Wert

$$\sqrt{2} = 1.4142136\ldots$$

berechnet. Wie macht das der Rechner?

Wir wissen, dass $\sqrt{2}$ die Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ ist. Die Funktion werten wir an zwei Stellen, die wir einfach berechnen können, aus:

$$f(1) = -1 \ , \ f(2) = 2$$

Die Nullstelle $\widetilde{x}$ muss also dazwischen liegen $1 < \widetilde{x} < 2$. Das Interpolationspolynom durch diese Daten ist $p_1(x) = 3x - 4$. Nun machen wir die Annahme $f(x) \approx p_1(x)$ und berechnen die Nullstelle von $p_1(x^*) = 0$. Das ist $x^* = \frac{4}{3} = 1.333..$. Wir verbessern unsere Schätzung so: $\frac{4}{3} < \widetilde{x} < 2$.

Wiederholen wir das Vorgehen, ergibt sich mit $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16-18}{9} = -\frac{2}{9}$ ein Interpolationspolynom $p_2(x) = \frac{20}{6}x - \frac{84}{18}$. Seine Nullstelle ist $x^{**} = 1.4$. Die Folge der Nullstellen scheint gegen $\sqrt{2}$ zu gehen.

Aufgabe 6: Warum nehmen wir nicht drei Werte z.B. $f(1) = -1$, $f(2) = 2$ und $f(3) = 7$ zur Bestimmung eines Interpolationspolynoms?

Warum ändern wir das Suchintervall nicht so, dass $1 < \widetilde{x} < \frac{4}{3}$?

Lösung 6:
Drei Punkte bestimmen eine Parabel eindeutig und wir erhalten $f(x) = p(x)$. Das erleichtert uns die Berechnung nicht.

Für das Intervall $1 < \widetilde{x} < \frac{4}{3}$ ist $f(1) = -1$ und $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{9}$. Da beide Funktionswerte das gleiche Vorzeichen haben, wissen wir nicht, ob eine Nullstelle im Intervall liegt.